## Modelos discretos

**1-Bernoulli**: Suponha um experimento que admite apenas dois resultados. Isto é, $\Omega = \{s, f\}$. Geralmente, $s$ é denominado sucesso e $f$ fracasso. Esse tipo de experimento é chamado de experimento de Bernoulli.

Defina $X = X(\omega) = \begin{cases} 1, \omega = s = \text{"sucesso"}; \\ 0, \omega = f = \text{"fracasso"}. \end{cases}$ Se $p = P(\{s\})$, então $X$ é denominada v.a. de Bernoulli de parâmetro $p$, $0 \leq p \leq 1$. Sua função de probabilidade (f.p.) é

$$P_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Notação: $X \sim Ber(p)$.

Temos que $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$.

**2-Binomial**: Considere $n$ repetições independentes do experimento de Bernoulli, cada uma com prob. de sucesso $p$. Seja $X$= "Número de sucessos registrados". Encontremos $P_X(x) = P(X=x)$.

Nesse caso $\Omega = \{w = (w_1, w_2, \cdots, w_n); w_i \in \{s, f\}\}$.

$\underline{\ \ }_1\ \underline{\ \ }_2\ \underline{\ \ }_3 \cdots \underline{\ \ }_{n-1}\ \underline{\ \ }_n$ ← $x$ sucessos ← $n-x$ fracassos

$\binom{n}{x}$ maneiras diferentes. Tenho $n$ "rótulos" que determinarão as $x$ posições que os sucessos aparecerão.

Cada maneira tem prob. $p^x(1-p)^{n-x}$. Logo,

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$E(X) \overset{(?)}{=} np$ e $Var(X) \overset{(?)}{=} np(1-p)$.

3 - Geométrica

Suponha o experimento $\mathcal{E}$ = "Repetir o ensaio de Bernoulli de parâmetro $p$ independentemente até a ocorrência do primeiro fracasso". Então, seu espaço amostral é

$$\Omega = \{\underset{\substack{\downarrow \\ Y=0}}{\overset{\substack{X=1 \\ \uparrow}}{s}}, \underset{\substack{\downarrow \\ Y=1}}{\overset{\substack{X=2 \\ \uparrow}}{sf}}, \underset{\substack{\downarrow \\ Y=2}}{\overset{\substack{X=3 \\ \uparrow}}{ssf}}, \underset{\substack{\downarrow \\ Y=3}}{\overset{\substack{X=4 \\ \uparrow}}{sssf}}, \underset{\substack{\downarrow \\ Y=4}}{\overset{\substack{X=5 \\ \uparrow}}{ssssf}}, \ldots\}$$

Seja $X$ = "Número de repetições até a parada do experimento". Nesse caso, dizemos que $X$ tem distribuição Geométrica de parâmetro $p$ e escrevemos $X \sim Geo(p)$. Uma outra formulação da v.a. Geométrica é $Y$ = "Número de sucessos obtidos". A função de probabilidades de $X$ é dada por

$$P_X(x) = P(X=x) = P(\{\overbrace{\underbrace{sss\cdots s}_{x-1}f}^{x}\}) = p^{x-1}(1-p),\ x=1,2,\cdots$$

e a de $Y$ por

$$P_Y(y) = P(Y=y) = P(\{\underbrace{sss\cdots s}_{y}f\}) = p^y(1-p),\ y=0,1,2,\cdots.$$

Repare que $X = Y+1$. Logo, $E(X)=E(Y)+1$ e $Var(X)=Var(Y)$.

Temos que

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y P_Y(y) = \sum_{y=0}^{\infty} y p^y (1-p) = (1-p)\sum_{y=0}^{\infty}(y+1-1)p^y$$

$$= (1-p)\left[\sum_{y=0}^{\infty}(y+1)p^y - \sum_{y=0}^{\infty}p^y\right] = (1-p)\left[\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\partial p^{y+1}}{\partial p} - \frac{1}{1-p}\right] = (1-p)\frac{\partial}{\partial p}\sum_{y=0}^{\infty}p^{y+1} - 1$$

$$= (1-p)\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p}{(1-p)}\right] - 1 = (1-p)\cdot\left[\frac{1-p-(-1)\cdot p}{(1-p)^2}\right] - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}.$$

Logo, $E(X) = E(Y)+1 = \frac{1}{1-p} - 1 + 1 = \frac{1}{1-p}$. Por outro lado,

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p^{x-1}(1-p) = (1-p)\sum_{x=1}^{\infty}(x+1-1)x p^{x-1}$$

$$= (1-p)\sum_{x=1}^{\infty}(x+1)xp^{x-1} - \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} x p^{x-1}(1-p)}_{E(X)=\frac{1}{1-p}} = (1-p)\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\partial^2 p^{x+1}}{\partial p^2} - \frac{1}{1-p}$$

$$= (1-p)\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[\sum_{x=1}^{\infty}p^{x+1}\right] - \frac{1}{1-p} = (1-p)\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[\frac{p^2}{1-p}\right] - \frac{1}{1-p} = (1-p)\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{2p-2p^2+p^2}{(1-p)^2}\right)\right] - 1/(1-p)$$

$$= (1-p)\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{2p-p^2}{(1-p)^2}\right)\right] - \frac{1}{1-p} = \frac{(1-p)}{(1-p)^4}\left[(2-2p)(1-p)^2 + 2(1-p)(2p-p^2)\right] - \frac{1}{1-p}$$

$$= \frac{1}{(1-p)^3}(1-p)\left[2(1-p)^2 + 2(2p-p^2)\right] - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{(1-p)^2}\left[2 \cancel{-4p} \cancel{+2p^2} \cancel{+4p} \cancel{-2p^2}\right] - 1/(1-p)$$

$$= \frac{2}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)} = \frac{2-1+p}{(1-p)^2} = \frac{1+p}{(1-p)^2}.$$

Logo,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1+p}{(1-p)^2} - \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 = \frac{1+p-1}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2} = Var(Y).$$

## 4- Binomial Negativa (Pascal)

Considere que um ensaio de Bernoulli de parâmetro $p$ é repetido independentemente até a obtenção de $k$ fracassos o espaço amostral desse experimento é

$$\Omega = \{\underbrace{\overbrace{ff\cdots f}^{X=0}}_{Y=k}, \underbrace{\overbrace{ff\cdots sf, \ldots, sf\cdots f}^{X=1}}_{Y=k+1}, \underbrace{\overbrace{ff\cdots ssf, \ldots, sf\cdots fsf, \ldots, ssf\cdots f}^{X=2}}_{Y=k+2}, \ldots\}$$

Seja $X$ = "Número de sucessos obtidos" e $Y$ = "Número de repetições realizadas". Assim, $Y = X + k$, logo, $E(Y) = E(X) + k$ e $Var(X) = Var(Y)$. Denotamos $X \sim BN(k,p)$ e $Y \sim BN(k,p)$.

$$\underbrace{\overset{(k-1)f}{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}\ f}_{y} \qquad \binom{y-1}{k-1}$$

$\binom{y-1}{k-1}$ combinações das $y-1$ posições para atribuir aos $k$ fracassos

Cada combinação tem prob. $p^{y-k}(1-p)^k$

Logo, a função de probabilidade de $Y$ é

$$P_Y(y) = P(Y=y) = \binom{y-1}{k-1} p^{y-k}(1-p)^k \ , \ y = k, k+1, \dots$$

Por raciocínio análogo, verificamos que

$$P_X(x) = P(X=x) = \binom{x+k-1}{k-1} p^{x}(1-p)^k \ , \ x = 0, 1, 2, \dots$$

O valor esperado de $X$ é

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \binom{x+k-1}{k-1} p^x (1-p)^k = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(x+k-1)!}{(k-1)!\,x!} p^x (1-p)^k$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{k}{k} \frac{(x-1+k)!}{(k-1)!\,(x-1)!} p\, p^{x-1} \frac{(1-p)^{k+1}}{(1-p)} = \frac{kp}{(1-p)} \sum_{x=1}^{\infty} \binom{x-1+k+1-1}{k+1-1} p^{x-1}(1-p)^{k+1}$$

$$= \frac{kp}{(1-p)} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k+1-1}{k+1-1} p^{x}(1-p)^{k+1}}_{BN(k+1,p)\ \to\ 1} = \frac{kp}{(1-p)} .$$

Portanto, $E(Y) = E(X) + k = \frac{kp}{(1-p)} + \frac{k(1-p)}{(1-p)} = \frac{k}{(1-p)}$. Em contrapartida,

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \binom{x+k-1}{k-1} p^x (1-p)^k = \sum_{x=1}^{\infty} \overset{(x-1+1)}{x} \frac{(x+k-1)!}{(k-1)!\,(x-1)!} p^x (1-p)^k$$

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{(x-1+k)!}{(k-1)!(x-1)!}p^x(1-p)^k+\frac{p}{(1-p)}\cdot k\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}\binom{x-1+k+1-1}{k+1-1}p^{x-1}(1-p)^{k+1}}_{BN(k+1,p)\ \to\ 1}$$

$$=\frac{kp}{(1-p)}+\sum_{x=2}^{\infty}\frac{(x-1+k)!}{(k+1)!(x-2)!}\cdot\frac{k(k+1)}{(1-p)^2}p^2\cdot p^{x-2}(1-p)^{k+2}$$

$$=\frac{kp}{(1-p)}+\frac{k(k+1)p^2}{(1-p)^2}\underbrace{\sum_{x=2}^{\infty}\binom{x-2+k+2-1}{k+2-1}p^{x-2}(1-p)^{k+2}}_{BN(k+2,p)\ \to\ 1}$$

Logo,

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{kp}{(1-p)}+\frac{k^2p^2+kp^2}{(1-p)^2}-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}=\frac{kp}{(1-p)}\Big[\underbrace{1+\frac{p}{(1-p)}}_{1/(1-p)}\Big]=\frac{kp}{(1-p)^2}$$

$$=Var(Y).$$

## 5- Hipergeométrica

Suponha que N objetos, r do tipo 1 e N-r do tipo 2, são colocados em uma urna. Considere o experimento $E$="Retirar n objetos da urna", $n\leq N$. Então, o espaço amostral desse experimento é

$$\Omega=\{w=(w_1,w_2,\dots,w_n);\ w_i=t_1,t_2,\ i=1,2,\dots,n\},$$

onde $t_1$="objeto do tipo 1" e $t_2$="objeto do tipo 2". Seja agora

$X$="Número de objetos do tipo 1 retirados". Admitindo que todo $w \in \Omega$ tem a mesma probabilidade de ser escolhido, então, como podemos ter $\binom{N}{n}$ combinações diferentes, a probabilidade de cada combinação é $1/\binom{N}{n}$.

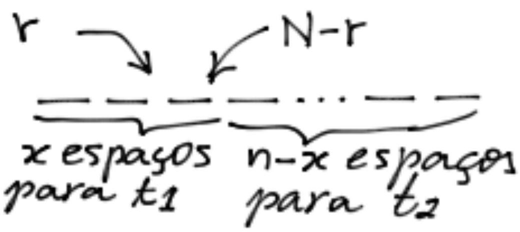
Observe que:

- se $n > N-r$, então, dos $n$ elementos retirados, pelo menos $n-(N-r)$ tem que ser do tipo 1;
- se $n \leq N-r$, é possível que todos objetos retirados sejam do tipo 2.

Logo, o número de objetos do tipo 1, $x$, deve ser tal que $x \geq \max\{0, n-(N-r)\}$. Por outro lado:

- se $r < n$, então, o número de objetos do tipo 1 será no máximo $r$;
- se $r \geq n$, então, é possível que todos elementos retirados sejam do tipo 1.

Portanto, $x \leq \min\{r, n\}$. Assim, a qtde de $w \in \Omega$ tais que $X(w) = x$, é




$$\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x} \begin{cases} \text{qtde de combinações} \\ \text{favoráveis a } [X=x]. \end{cases}$$

Logo, a função de probabilidade de $X$ é dada por

$$P_X(x) = P(X=x) = \binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}\Big/\binom{N}{n}, \quad \max\{0, n-(N-r)\} \leq x \leq \min\{r,n\}.$$

Nesse caso, denotamos $X \sim Hip(N,r,n)$. Seja

$$Im\, X = \{x \in \mathbb{Z};\ \max\{0, n-(N-r)\} \leq x \leq \min\{r,n\}\}.$$

Logo,

$$E(X) = \sum_{x \in Im X} x \cdot \frac{r!}{x!\,(r-x)!} \cdot \frac{(N-r)!}{(n-x)!\,(N-r-(n-x))!} \cdot \frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$= \sum_{x \in A} \frac{r\cdot(r-1)!}{(x-1)!\,(r-1-(x-1))!} \cdot \frac{(N-1-(r-1))!}{(n-1-(x-1))!\,(N-1-(r-1)-(n-1-(x-1)))!} \cdot \frac{n\cdot(n-1)!\,(N-1-(n-1))!}{N \cdot (N-1)!}$$

$$= \sum_{x \in A} \frac{r\cdot n}{N} \cdot \binom{r-1}{x-1}\binom{N-1-(r-1)}{n-1-(x-1)}\Big/\binom{N-1}{n-1},$$

onde $A = \{x : \max\{1, n-(N-r)\} \leq x \leq \min\{r,n\}\}$, seja agora

$$B = \{x : \max\{0, n-1-\underbrace{(N-r)}_{N-1-(r-1)}\} \leq x \leq \min\{r-1, n-1\}\},$$

então

$hip(N-1, r-1, n-1)$

$$E(X) = \frac{rn}{N} \underbrace{\sum_{x \in B} \binom{r-1}{x}\binom{N-1-(r-1)}{n-1-x}}_{1}\Big/\binom{N-1}{n-1} = rn/N.$$

Da mesma maneira mostramos que $Var(X) = \frac{nr}{N} \cdot \frac{(N-r)}{N} \frac{(N-n)}{N-1}$.

# 6- Poisson

A v.a. X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidades é dada por

$$P_X(x) = P(X=x) = e^{-\lambda}\lambda^x / x!\,,\quad x = 0,1,2,\ldots$$

Neste caso escrevemos $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Esse tipo de distribuição é muito utilizada para modelar o número de ocorrências em determinado intervalo de tempo (ou comprimento, ou área, ...).

Temos que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\cdot\lambda}{(x-1)!} = \lambda \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}_{1} = \lambda\,,$$

além disso,

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty} (x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} + \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}}_{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{x!} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

Logo, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Dessa forma vemos que a esperança e a variância da Poisson são equivalentes.