Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro Universitário Norte do Espírito Santo - CEUNES

Departamento de Matemática Aplicada - DMA

Prof. Isaac P. Santos

3a Lista de Exercícios de Algoritmos Numéricos - 2018/1
Sistemas Lineares: métodos diretos e iterativos

1. Determine as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ para os seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$.

   a) $(4, 4, -4, 4)$

   b) $(0, 5, 5, 5)$

   c) $(6, 0, 0, 0)$

2. Encontre $\|\mathbf{x}\|_\infty$ e $\|\mathbf{x}\|_2$ para os seguinte vetores

   a) $\mathbf{x} = (3, -4, 0, \frac{3}{2})$;

   b) $\mathbf{x} = (2, 1, -3, 4)$;

   c) $\mathbf{x} = (\sin(k), \cos(k), 2^k)$ para um inteiro positivo k;

   d) $\mathbf{x} = (4/(k+1), 2/k^2, k^2 e^{-k})$ para um inteiro positivo k.

3. Calcular as normas $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ e $\|A\|_2$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 8 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Encontre $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ para as seguintes matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Descreva as diferenças entre os métodos diretos e iterativos para resolver sistemas lineares.

6. O que é um *critério de parada* de um método iterativo?

7. Assinale Falso ou Verdadeiro. Justifique sua resposta!

   a) O método de Jacobi é convergente se, e somente se, o critério das linhas for satisfeito.

   b) Se o método de Gauss-Seidel é convergente, então o critério das linhas é satisfeito.

   c) Se $0 < \omega < 2$ então o método SOR é convergente.

   d) Se $0 < \omega < 2$ e a matriz dos coeficientes é simétrica e definida positiva então o método SOR é convergente.

e) O método SOR diverge se $\omega \leq 0$ ou $\omega \geq 2$.

8. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

cuja solução é $(3, 4, -5)$.

a) O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados a este sistema?

b) Implemente no OCTAVE os métodos de Gauss-Seidel e SOR (com $\omega = 1.25$) para resolver este sistema. Qual método apresenta maior rapidez de convergência?

c) Crie uma tabela com as 20 primeiras iterações dos dois métodos. Acrescente à tabela 20 iterações do método SOR com um ω diferente. Comente os resultados.

9. Resolver o sistema dado a seguir pelos métodos iterativos de Jacobi e de Gauss-Seidel com

$$\frac{\max_{i=1,\cdots,4} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{i=1,\cdots,4} |x_i^{(k)}|} < 10^{-3} \qquad \text{ou} \qquad k_{max} = 10$$

.

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 4 \\ -11 \\ 150 \end{bmatrix}$$

10. Dado os sistemas lineares abaixo, verificar a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel e justificar os resultados

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

11. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 10x_1 + x_2 + x_4 = -8 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

b) Utilizando o resultado do item anterior, escreva o sistema linear $LUx = Pb$, equivalente ao sistema linear dado, onde P é uma matriz de permutação. Determine a matriz inversa.

c) Podemos determinar a solução aproximada do sistema usando o método de Gauss - Seidel para qualquer aproximação inicial? justifique sua resposta.

12. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema não satisfaz o critério de linhas.

b) Um outro critério de convergência utilizado para o método de Gauss Seidel é o **critério de Sassenfeld**. Sejam

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|},$$

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right]}{|a_{ii}|}, \quad i = 2, 3, \cdots, n \\ &= \frac{|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \cdots + |a_{i,i-1}|\beta_{i-1} + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|}{|a_{ii}|}. \end{aligned}$$

Se $\beta = \max_{i=1,\cdots,n}\{\beta_i\} < 1$ o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para qualquer $\mathbf{x}^0$ dado. A recíproca não é verdadeira. Além disso, quanto menor for β, mais rápida será a convergência.

Mostre que este sistema não satisfaz o critério de Sassenfeld.

c) O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados a este sistema?

d) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações sastisfaz o critério de Sassenfeld.

d) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema, com a permutação sugerida no item anterior e erro

$$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \le \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$$

13. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Determine para que valores de k se tem garantia de que o método de Jacob e Gauss-Seidel, geram uma sequência convergente para qualquer solução inicial.

b) Escolha o menor valor inteiro positivo de k e determine uma solução aproximada do sistema, usando os métodos acima, com erro

$$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$$

c) Qual dos dois métodos converge mais rápido?

14. Calcule os números de condicionamento das seguintes matrizes com relação a $\|\cdot\|_\infty$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$.

15. O sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

tem solução $(1,1)^T$. Mude a matriz A para

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule a nova solução do sistema $\widetilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ resultante. A matriz A é mal condicionada?

16. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 0,78000x_1 & - & 0,56300x_2 & = & 0,21700 \\ 0,91300x_1 & - & 0,65900x_2 & = & 0,25400 \end{cases}$$

a) Se $\tilde{x}_1 = (0,34100; -0,08700)$ e $\tilde{x}_2 = (0,99900; -1,00100)$ são duas soluções aproximadas, qual das duas é a melhor? Justifique sua resposta.

b) Resolva o sistema dado usando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, trabalhando com 5 casas decimais.

c) Qual é a solução exata deste sistema? Este sistema é bem condicionado? justifique sua resposta.

17. Resolva o sistema a seguir, avaliando o erro cometido em cada caso.

$$\begin{cases} 0,0002x_1 & - & 2x_2 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \end{cases}$$

a) Pelo método de eliminação de Gauss;

b) Pelo método de eliminação de Gauss com Pivotação Parcial;

18. A *matriz de Hilbert* $n \times n$, $H^{(n)}$, definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,n$$

é um exemplo clássico de matriz mal condicionada.

a) Determine $H^{(2)}, H^{(3)}, H^{(4)}$ e $H^{(5)}$

b) Calcule o condicionamento das matrizes do item anterior usando $\| \cdot \|_\infty$.

19. Escreva as expressões para a seqûencia obtida pelo método de Gauss-Seidel para um sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz pentadiagonal cujas diagonais são constantes e iguais a $-1, 1, 7, 2, -2$ (diagonal mais baixa a diagonal mais alta, sendo a diagonal principal igual a 7). Considere que a matriz A é quadrada e de ordem $n = 20$ e que somente as constantes de cada diagonal são armazenadas em um vetor $diag = [-1, 1, 7, 2, -2]^T$ com cinco posições. Calcule uma iteração para as três primeiras posições do vetor solução, considerando $x^{(0)}$ igual ao vetor nulo e o vetor das constantes $b(i) = i$, $i = 1, 2, 3, \cdots, 20$.

20. Implemente no OCTAVE os seguintes algoritmos/métodos

    a) algoritmo de substituições sucessiva;

    b) algoritmo de substituições retroativa;

    c) decomposição LU com pivotação parcial;

    d) método de Jacobi;

    e) método de Gauss-Seidel;

    f) método SOR.