Introdução ao Método de Elementos Finitos

Parte I

Isaac P. Santos

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

18 a 22 de fevereiro de 2018

Laboratório
Nacional de
Computação
Científica

Sumário

- Introdução
- Interpolação unidimensional (linear)
- Método de elementos finitos unidimensional
- Interpolação bidimensional
- Método de elementos finitos bidimensional

Laboratório Nacional de Computação Científica

Pré-requisitos

- Cálculo diferencial e integral
- Álgebra linear
- Programação
- Noções de equações diferenciais

Nível de graduação!

Espaço vetorial $\mathbb{P}_1(a, b)$

Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, e $\mathbb{P}_1(I)$ o espaço vetorial das funções (polinomiais) lineares em I, definido por

$$\mathbb{P}_1(I) = \{v| \quad v(x) = c_0 + c_1 x, \quad x \in I, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

que é o conjunto de todas funções da forma $v(x) = c_0 + c_1 x$ definidas em I.

- $\mathbb{P}_1(I)$ é um espaço vetorial de dimensão 2;
- base canônica de $\mathbb{P}_1(I)$: $\{1, x\}$;
- Qualquer função $v \in \mathbb{P}_1(I)$ tem dois graus de liberdade.

A função v pode ser determinada de forma única através de seus valores

$$v_a = v(a) \quad \text{e} \quad v_b = v(b),$$

nos pontos a e b, extremos do intervalo $I = [a, b]$.

Suponha que os valores $v_a = v(a)$ e $v_b = v(b)$ são dados. Então, calculando $v(x) = c_0 + c_1 x$ em $x = a$ e $x = b$ obtém-se o sistema linear

$$\begin{aligned} v_a = v(a) &= c_0 + c_1 a; \\ v_b = v(b) &= c_0 + c_1 b, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Determinar a função $v(x) = c_0 + c_1 x$ que passa pelos pontos $(a, v(a))$ e $(b, v(b))$ equivale a obter a solução $\{c_0, c_1\}$ do sistema linear (2). Esse sistema linear tem solução? Note que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = b - a > 0,$$

pois $b - a = |I|$ é o comprimento do intervalo I, um valor positivo.

- Portanto o sistema tem solução única, para qualquer vetor dos termos independentes dado. Consequentemente, existe uma única função $v \in \mathbb{P}_1(I)$ que toma valores v_a e v_b em a e b, respectivamente.

Os pontos a e b, extremos do intervalo $I = [a, b]$ são chamados de *pontos nodais*, ou simplesmente, *nós*. A matriz dos coeficientes do sistema linear (2) é chamada de *matriz de Vandermond*.

Sabendo que pode-se determinar qualquer função $v \in \mathbb{P}_1(I)$ através de seus valores nodais v_a e v_b, será introduzida uma nova base $\{\lambda_a(x), \lambda_b(x)\}$ para o espaço vetorial $\mathbb{P}_1(I)$. Essa base é chamada de *base nodal*, e é definida fazendo

$$\lambda_a(a) = 1, \quad \lambda_a(b) = 0;$$

$$\lambda_b(a) = 0, \quad \lambda_b(b) = 1.$$

Se $a = x_0$ e $b = x_1$ então

$$\lambda_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1. \tag{3}$$

Cada função λ_i, $i = 0, 1$, é uma função linear que toma o valor 1 no nó x_i e 0 no outro nó.

Laboratório Nacional de Computação Científica

A razão para o uso da base nodal é que ela nos permite expressar qualquer função $v \in \mathbb{P}_1(I)$ como uma combinação linear de λ_a e λ_b, com coeficientes dessa combinação linear, os valores $v_a = v(a)$ e $v_b = v(b)$, isto é,

$$v(x) = v_a \lambda_a(x) + v_b \lambda_b(x). \tag{4}$$

De fato, se $v(x) = \beta_a \lambda_a(x) + \beta_b \lambda_b(x)$, então,

$$v(a) = \beta_a \underbrace{\lambda_a(a)}_{=1} + \beta_b \underbrace{\lambda_b(a)}_{=0} = \beta_a,$$

isto é, $\beta_a = v(a) = v_a$. Analogamente, calculando $v(b)$, obtém-se $\beta_b = v(b) = v_b$.

Observe que para escrever essa mesma função em relação à base canônica $\{1, x\}$ deve-se resolver o sistema (2) para a obtenção dos coeficientes c_0 e c_1.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Como $\lambda_a \in \mathbb{P}_1(I)$ então $\lambda_a(x) = c_0 + c_1 x$. Calculando $\lambda_a(x)$ em $x = a$ e $x = b$ obtem-se o sistema linear (2) com lado direito $[\lambda_a(a), \lambda_a(b)]^T = [1, 0]^T$. Resolvendo o sistema linear resultante, obtém-se

$$\lambda_a(x) = \frac{b - x}{b - a}. \tag{5}$$

Analogamente, calculando $\lambda_b(x)$ em $x = a$ e $x = b$ obtem-se (2) com lado direito $[\lambda_b(a), \lambda_b(b)]^T = [0, 1]^T$. Resolvendo o sistema linear resultante, obtém-se

$$\lambda_b(x) = \frac{x - a}{b - a}. \tag{6}$$

Se $a = x_0$ e $b = x_1$ então

$$\lambda_0(x) = \frac{x_0 - x}{x_1 - x_0}, \qquad \lambda_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- A base nodal é mais "prática" do que a base canônica.
- A base nodal é conhecida como base lagrangeana.

Espaço de Funções Contínuas e Lineares Por Partes

Funções lineares por partes são uma extensão natural de funções lineares.

Considere uma partição do domínio $I = [0, L]$,

$$\mathcal{P} : 0 < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L,$$

formada por

- $n + 1$ pontos (chamados *pontos nodais*) $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ e
- n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, de comprimentos $h_i = x_i - x_{i-1}$ (*elementos*).

A partição $\mathcal{P}$ é chamada de *malha*.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Espaço de Funções Contínuas e Lineares Por Partes

Uma função v construída sobre a malha $\mathcal{P}$ é *linear por partes* se for linear em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$;

Uma função v construída sobre a malha $\mathcal{P}$ é *contínua e linear por partes* se for linear por partes e contínua em seu domínio.

Sobre o intervalo $I = [a, b]$ foi definido o espaço vetorial $\mathbb{P}_1(I)$ das funções lineares definidas em I.

Agora deseja-se definir um espaço vetorial formado por funções *contínuas e lineares por partes* associadas à malha $\mathcal{P}$.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Associado à malha $\mathcal{P}$, define-se o espaço V_h das funções *contínuas e lineares por partes* por

$$V_h = \left\{ v| \quad v \in C^0(I); \quad v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), i = 1, \cdots, n \right\},$$

onde $C^0(I)$ é o espaço das funções contínuas definidas em I e $\mathbb{P}_1(I_i)$ é o espaço das funções lineares definidas em $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Portanto, as funções pertencentes ao conjunto V_h são lineares em cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e contínuas no domínio todo $I = [0, L]$.

Nossa missão agora é descrever uma base **nodal** para o espaço V_h.

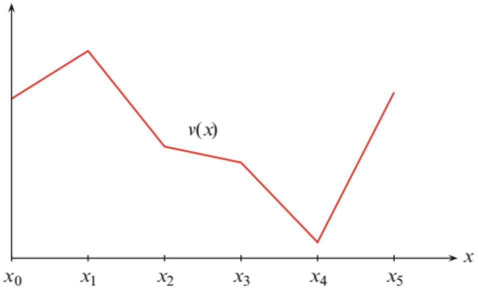

Figure: A função contínua e linear por partes

Laboratório Nacional de Computação Científica

Qualquer função $v \in V_h$ é determinada de forma única por seus valores nodais

$$v(x_0), v(x_1), \cdots, v(x_n)$$

e reciprocamente, para qualquer valores nodais $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ existe uma função $v \in V_h$ tal que $v(x_i) = \alpha_i$, $i = 0, \cdots, n$.

Motivado por esse fato(!), associamos os valores nodais com os graus de liberdade das funções de V_h e definimos uma base (para o espaço V_h) que seja associada a esses valores nodais, a saber,

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\},$$

onde

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

Laboratório Nacional de Computação Científica

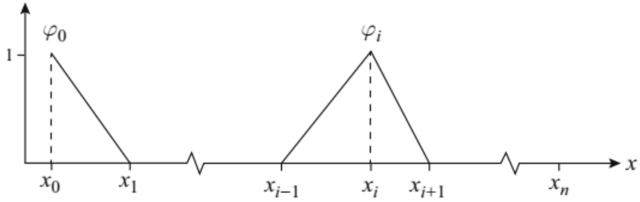

Figure: Função chapéu

Observe que a dimensão do espaço V_h é $n+1$.

Devido a sua forma, a função $\varphi_i(x)$ é chamada de *função chapéu*.

Cada função chapéu $\varphi_i(x)$ é uma função contínua e linear por partes, tomando o valor 1 em x_i e 0 nos outros nós da malha.

Note que $\varphi_i(x)$ é diferente de zero somente nos dois subintervalos I_i e I_{i+1} que contém o nó x_i. Diz-se então que o suporte de φ_i é $I_i \cup I_{i+1}$, isto é, $supp(\varphi_i) = I_i \cup I_{i+1}$. A exceção são as funções φ_0 e φ_n associadas aos pontos nodais $x_0 = 0$ e $x_n = L$, respectivamente, que possuem suporte somente em um intervalo.

Assim como foi feito para a base nodal de $\mathbb{P}_1(I)$, a razão para definir a base nodal de V_h é que ela nos permite expressar qualquer função $v \in V_h$ como uma combinação linear de $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$, com coeficientes dessa combinação linear determinados a priori, isto é, os valores $v(x_0), v(x_1), \cdots, v(x_n)$.

Isso significa que se $v \in V_h$ então

$$v(x) = \sum_{i=0}^{n} v(x_i)\varphi_i(x). \tag{8}$$

De fato, se $v(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \varphi_i(x)$, então,

$$v(x_j) = \beta_0 \underbrace{\varphi_0(x_j)}_{=0} + \cdots + \beta_{j-1} \underbrace{\varphi_{j-1}(x_j)}_{=0} + \beta_j \underbrace{\varphi_j(x_j)}_{=1} + \beta_{j+1} \underbrace{\varphi_{j+1}(x_j)}_{=0} \cdots + \beta_n \underbrace{\varphi_n(x_j)}_{=0} = \beta_j$$

para $j = 0, 1, \cdots, n$.

Laboratório Nacional de Computação Científica

A expressão explicita para as funções chapéu é dada por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & \text{se } x \in I_i = [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & \text{se } x \in I_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{9}$$

Interpolação linear em $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Os espaços de funções $\mathbb{P}_1(I)$ e V_h serão utilizados para contruir aproximações para uma dada função f através de *interpolação* linear e linear por partes.

Recorda-se que a base nodal do espaço $\mathbb{P}_1(I)$ é o conjunto $\{\lambda_0(x), \lambda_1(x)\}$.

Dada uma função f contínua em $I = [a, b]$, defini-se a *interpolante linear* $\pi f \in \mathbb{P}_1(I)$ *de* f por

$$\pi f(x) = f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x). \tag{10}$$

Note que nos pontos nodais $x = a$ e $x = b$, tem-se

$$\pi f(a) = f(a)\underbrace{\lambda_a(a)}_{=1} + f(b)\underbrace{\lambda_b(a)}_{=0} = f(a); \tag{11}$$

$$\pi f(b) = f(a)\underbrace{\lambda_a(b)}_{=0} + f(b)\underbrace{\lambda_b(b)}_{=1} = f(b). \tag{12}$$

Então a interpolante linear $\pi f \in \mathbb{P}_1(I)$ *de* f é uma função que satisfaz (11), (12) e é linear em I.

Obviamente, se $f \in \mathbb{P}_1(I)$ então $f = \pi f$ em I. No caso em que $f \notin \mathbb{P}_1(I)$ é de interesse medir a diferença $f - \pi f$, que é chamada *erro de interpolação*. Para medir o erro de interpolação precisa-se de uma *norma*.

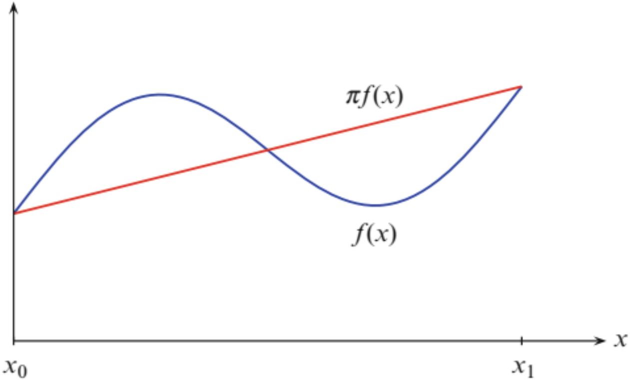

Figure: Uma função f se sua interpolante πf.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Produto interno e norma

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno em V é uma função $(\cdot,\cdot)_V : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $(u,u)_V \geq 0$;

(ii) $(u,u)_V = 0 \iff u = 0$;

(iii) $(u,v)_V = (v,u)_V$;

(iv) $(\alpha u + \beta v, w)_V = \alpha(u,w)_V + \beta(v,w)_V$;

Uma norma em um espaço vetorial (real) V é uma função $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $\|u\|_V \geq 0$;

(ii) $\|u\|_V = 0 \iff u = 0$;

(iii) $\|\alpha u\|_V = |\alpha| \|u\|_V$;

(iv) $\|u+v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V$.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Não é difícil mostrar que se $(\cdot,\cdot)_V$ é um produto interno em V então

$$\|u\|_V = \sqrt{(u,u)_V}$$

define uma norma em V. Essa norma é chamada de norma induzida pelo produto interno.

Uma propriedade importante que relaciona um produto interno com a norma associada é a desigualdade de Cauchy-Schwarz, dada por

$$|(u,v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Serão definidas duas normas, a *norma do infinito* e a *norma de* L^2. A norma do infinito é definida por

$$\|v\|_\infty = \max_{x \in I} |v(x)|. \tag{13}$$

Essa norma fornece uma informação pontual da função, que é o seu valor máximo em módulo.

Antes de definir a norma de L^2, definir-se-á primeiro o espaço L^2, que é um dos mais importantes espaços de funções:

$$L^2(I) = \left\{ v : I \to \mathbb{R} \middle| \int_I |v(x)|^2 dx < \infty \right\}, \tag{14}$$

isto é, o espaço $L^2(I)$ é o espaço das funções quadrado integráveis em I[1]. O produto interno usual do espaço $L^2(I)$ é dado por

$$(u, v)_{L^2(I)} = \int_I u(x)v(x)dx$$

e a norma usual do espaço $L^2(I)$ é

$$\|u\|_{L^2(I)} = \sqrt{(u, u)_{L^2(I)}} = \left[\int_I |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

[1] A definição precisa do espaço $L^2(I)$ é baseada na teoria de integração de Lebesgue, um assunto que está além do escopo desse texto.

A norma do espaço $L^2(I)$ fornece um *valor médio* associado ao tamanho da função u em I.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço $L^2(I)$ resulta em

$$\int_I f(x)g(x)dx \leq \|f\|_V \|g\|_V, \quad \forall f, g \in V.$$

Com esses conceitos, pode-se medir o erro de interpolação entre f e πf na norma de L^2.

Proposição (Erro da interpolante linear)

A interpolante de f em I, denotada por $\pi f \in \mathbb{P}_1(I)$, satisfaz as estimativas

$$\begin{aligned} \|f - \pi f\|_{L^2(I)} &\leq h^2 \|f''\|_{L^2(I)}; \quad (15) \\ \|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} &\leq h \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (16) \end{aligned}$$

onde $h = b - a > 0$.

Interpolação Contínua e Linear-Por-Partes

Relembremos o espaço $V_h = \left\{ v | \quad v \in C^0(I); \quad v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i) \right\}$ e sua base nodal $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$.

Considere $I = [0, L]$ e $f \in C^0(I)$.

Define-se a *interpolante contínua e linear-por-partes* de f sobre a malha $\mathcal{P}$ de I, como sendo a função $\pi f \in V_h$ satisfazendo

$$\pi f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x). \tag{17}$$

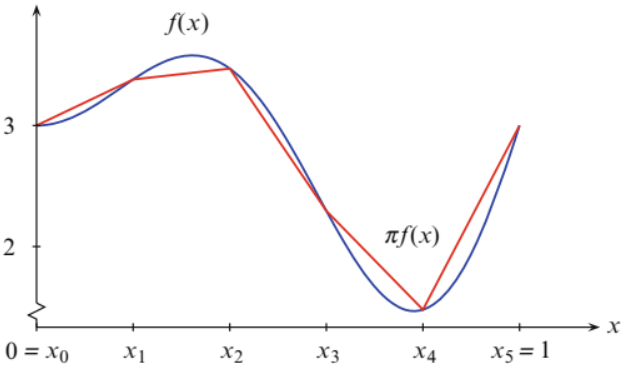

Figure: Uma função f e sua interpolante contínua e linear por partes πf.

Com respeito ao erro de interpolação $e = f - \pi f$ em V_h temos o seguinte resultado.

Proposição

A interpolante de f, denotada por $\pi f \in V_h$, satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{i=1}^{n} h_i^4 \|f''\|^2_{L^2(I_i)}; \quad (18)$$

$$\|(f - \pi f)'\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \|f''\|^2_{L^2(I_i)}, \quad (19)$$

onde $h_i = |I_i| = x_i - x_{i-1} > 0$.

Exercícios

1) Considere a partição (malha) $\mathcal{P}$ do domínio $I = [0, 1]$: $0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1$, onde $x_1 = 1/6$ e $x_2 = 1/2$ e seja V_h o espaço das funções contínuas e lineares por partes definidas em $\mathcal{P}$.
   a) Determine a expressão analítica para a função chapéu $\varphi_1(x)$ e construa seu gráfico em $\mathcal{P}$.
   b) Determine a função $v(x) = -\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + 2\varphi_3(x)$ e sua derivada $v'(x)$. Esboce os gráficos de v e v'.
   c) Esboce o gráfico da função constante por partes $h(x) = h_i$ em cada subintevalo I_i.
   d) Qual a dimensão de V_h?
2) Determine a interpolante linear $\pi f \in \mathbb{P}_1(I)$, onde $I = [0, 1]$, das seguintes funções
   a) $f(x) = x^2$.
   b) $f(x) = 3sen(2\pi x)$.

   Esboce os gráficos de f e πf.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Exercícios

3) Seja V_h o espaço das funções contínuas e lineares por partes definidas em uma malha uniforme com quatro pontos de $I = [0, 1]$. Determine e esboce os gráficos de f e πf para as seguintes funções
   a) $f(x) = x^2 + 1$.
   b) $f(x) = cos(\pi x)$.
4) Interpolação é uma forma simples de aproximar uma função contínua, mas existem outros métodos de aproximação de funções, como por exemplo a projeção L^2. Dado uma função $f \in L^2(I)$, a projeção L^2 de f, denotada por $P_h f \in V_h$ é definida por

$$\int_I \Big(f(x) - Phf(x)\Big)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in V_h.$$

Descreva um procedimento para determinar $P_h f$.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Bibliografia Básica

- Mats G. Larson and Fredrik Bengzon. The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications. Springer, 2013.
- Alfio Quarteroni. Numerical Models For Differential Problems. Springer, 2009.

Muito obrigado!

Laboratório Nacional de Computação Científica