Introdução ao Método de Elementos Finitos

Parte III

Isaac P. Santos

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

18 a 22 de fevereiro de 2018

Laboratório Nacional de Computação Científica

Sumário

- Introdução
- Interpolação unidimensional
- Método de elementos finitos unidimensional
- Interpolação bidimensional
- Método de elementos finitos bidimensional

Pré-requisitos

- Cálculo diferencial e integral
- Álgebra linear
- Programação
- Noções de equações diferenciais

Nível de graduação!

Aproximação Polinomial Por Partes Bidimensional

Neste capítulo estendemos o conceito de aproximação polinomial por partes para duas dimensões. A ideia básica é construir espaços de funções polinomiais por partes, uma vez que essas funções são fáceis de serem manipuladas computacionalmente e podem ser usadas para aproximar outros tipos de funções.

Uma dificuldade com a construção de polinômios por partes em dimensão 2 ou 3 é que primeiramente o domínio precisa ser particionado (discretizado) em elementos, tais como triângulos, e isso pode ser uma tarefa não trivial se o domínio tiver uma forma complexa.

Triangulações

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira poligonal, denotada por $\partial\Omega$. Uma triangulação (também chamada de partição, malha ou *grid*) $\mathcal{T}_h$ de Ω é um conjunto

$$\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \cdots, T_{nel}\},$$

de triângulos (ou quadriláteros) T_e, $e = 1, \cdots, nel$, onde nel é o número de elementos (triângulos ou quadriláteros).

Uma triangulação é chamada de *conforme* se

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{nel} T_e,$$

onde $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω, isto é, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Além disso,

- $\mathring{T} \neq \emptyset$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, onde $\mathring{T}$ é o interior de T;
- $\mathring{T}_i \cap \mathring{T}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$;
- Se $F = T_i \cap T_j \neq \emptyset$, com $i \neq j$, então F é um aresta ou um vértice.

Denotamos por h_T o diâmetro de $T \in \mathcal{T}_h$ (ou o maior lado do triângulo T) e

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

Geradores de Malhas

- EasyMesh (e ShowMesh - para visualização);
- GMSH;
- gerador do MATLAB (PDE-Tool);
- gerador da LIBMESH (biblioteca - solução numérica de EDPs);
- etc.

Estruturas de dados para representação de uma malha

Para uma malha com $nnos$ nós e nel elementos (triângulos) pode-se utilizar duas estruturas de dados (matrizes):

- *COORD*: *matriz coordenada* - matriz que armazena as coordenadas (x, y) dos pontos nodais da malha. Sua dimensão é $nnos \times 2$ ou $2 \times nnos$;
- *IEN*: *matriz de conectividade* - matriz que associa a cada elemento seus vértices globais. Sua dimensão é $nel \times 3$ ou $3 \times nel$. A enumeração dos nós é feita no sentido anti-horário.

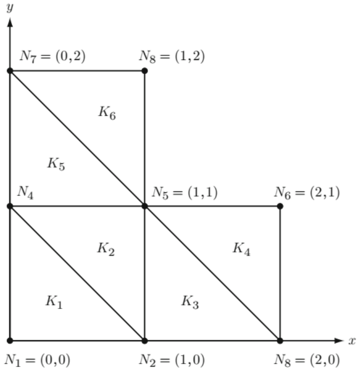

Figure: Malha triangular com elementos $K_1, \cdots, K_6$.

Determine as matrizes COORD e IEN para essa malha.

O espaço das funções polinomiais (lineares) em um elemento triangular

Seja T um triângulo e $\mathbb{P}_1(T)$ o espaço das funções lineares em T, definido por

$$\mathbb{P}_1(T) = \{v; \quad v = v(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y, \quad (x,y) \in T, \quad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{1}$$

Esse espaço contém todas as funções da forma

$$v(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y,$$

que representa um plano definido em T.

Qualquer função $v \in \mathbb{P}_1(T)$ é determinada de forma única por seus valores nodais

$$\alpha_i = v(N_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

onde $N_i = (x_i, y_i)$ são as coordenadas dos vértices de T.

Laboratório Nacional de Computação Científica

As constantes c_0, c_1 e c_2 são determinadas fazendo

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= v(x_1, y_1) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 y_1;\\ \alpha_2 &= v(x_2, y_2) = c_0 + c_1 x_2 + c_2 y_2;\\ \alpha_3 &= v(x_3, y_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 y_3\end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

A matriz desse sistema é chamada de matriz de *Vandermond*. Como seu determinante é igual ao dobro da área do triângulo T, esse sistema tem solução única. Qualquer função $v \in \mathbb{P}_1(T)$ que se conheça seus valores nodais pode ser obtida pela solução do sistema (2).

Dizemos que as funções $v \in \mathbb{P}_1(T)$ são descritas através da base usual de $\mathbb{P}_1(T)$, dada por $\{1, x, y\}$.

Note que $\dim \mathbb{P}_1(T) = 3$.

A base nodal

$$\{\lambda_1(x,y), \lambda_2(x,y), \lambda_3(x,y)\}$$

de $\mathbb{P}_1(T)$ será determinada a seguir.

Resolvendo o sistema (2) obtém-se

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2A^e}\Big[\alpha_1(x_2y_3 - x_3y_2) + \alpha_2(x_3y_1 - x_1y_3) + \alpha_3(x_1y_2 - x_2y_1)\Big];\\
c_1 &= \frac{1}{2A^e}\Big[\alpha_1(y_2 - y_3) + \alpha_2(y_3 - y_1) + \alpha_3(y_1 - y_2)\Big];\\
c_2 &= \frac{1}{2A^e}\Big[\alpha_1(x_3 - x_2) + \alpha_2(x_1 - x_3) + \alpha_3(x_2 - x_1)\Big],
\end{aligned}
$$

onde A^e é a área do elemento (triângulo) T, dada por

$$
A^e = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Big[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)\Big].
$$

Substituindo c_0, c_1 e c_2 na expressão para v, resulta em

$$v(x,y) = \alpha_1\lambda_1(x,y) + \alpha_2\lambda_2(x,y) + \alpha_3\lambda_3(x,y),$$

onde $\alpha_i = v(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3$ e

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x,y) &= \frac{1}{2A^e}\Big[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_1)x + (x_3 - x_2)y\Big];\\
\lambda_2(x,y) &= \frac{1}{2A^e}\Big[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\Big];\\
\lambda_3(x,y) &= \frac{1}{2A^e}\Big[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\Big]
\end{aligned}$$

são as funções que formam a base nodal do espaço $\mathbb{P}_1(T)$.

Essas funções satisfazem

$$\lambda_i(N_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

e podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \lambda_1(x,y) &= \frac{1}{2A^e}\Big[a_1 + b_1 x + c_1 y\Big]; \\ \lambda_2(x,y) &= \frac{1}{2A^e}\Big[a_2 + b_2 x + c_2 y\Big]; \\ \lambda_3(x,y) &= \frac{1}{2A^e}\Big[a_3 + b_3 x + c_3 y\Big], \end{aligned} \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3 \qquad c_1 = x_3 - x_2; \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad c_2 = x_1 - x_3; \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2 \qquad c_3 = x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Elemento de referência

O elemento de referência $\bar{T}$ é o triângulo com pontos nodais $N_1 = (0,0)$, $N_2 = (1,0)$ e $N_3 = (0,1)$. A área desse triângulo é $1/2$ e a base nodal de $\mathbb{P}_1(\bar{T})$ é dada pelas funções

$$\begin{aligned} \lambda_1(x,y) &= 1 - x - y; \\ \lambda_2(x,y) &= x; \\ \lambda_3(x,y) &= y. \end{aligned} \tag{5}$$

Interpolação linear em um triângulo

Considere o problema de aproximar funções em um triângulo T. Dado uma função contínua f sobre T com vértices (nós) N_1, N_2 e N_3, a interpolante linear $\pi f \in \mathbb{P}_1(T)$ de f é definida por

$$\pi f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} f(N_i)\lambda_i(x,y), \tag{6}$$

onde o conjunto $\{\lambda_1(x,y), \lambda_2(x,y), \lambda_3(x,y)\}$ forma a base nodal de $\mathbb{P}_1(T)$.

A interpolante $\pi f \in \mathbb{P}_1(T)$ é um plano, que coincide com f nos três pontos nodais. De fato,

$$\pi f(N_i) = f(N_i)$$

para todo $i = 1, 2, 3$.

Estimativa de Erro

Para estimarmos o erro de interpolação $f - \pi f$ em alguma norma específica precisamos introduzir algumas notações e definições.

Definição (espaço $H^1(\Omega)$)

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Define-se o espaço de Hilbert

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}; \quad v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Note que $H^1(\Omega)$ é o espaço formado por funções que estão em $L^2(\Omega)$ de forma que suas derivadas parciais (no sentido generalizado) também estão em $L^2(\Omega)$.

Um produto interno em $H^1(\Omega)$ é definido por

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)_{L^2(\Omega)}, \tag{7}$$

isto é,

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega u(x, y)v(x, y)d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v d\Omega \\ &= \int_\Omega u(x, y)v(x, y)d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\Omega. \end{aligned}$$

A norma induzida pelo produto interno é dada por

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega)}} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{8}$$

Definição (espaço $H^2(\Omega)$)

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Define-se o espaço de Hilbert

$$H^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}; \quad v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Observe que $H^2(\Omega)$ é o espaço formado por funções que estão em $L^2(\Omega)$ de forma que suas derivadas parciais (no sentido generalizado) até 2a ordem também estão em $L^2(\Omega)$. Um produto interno em $H^1(\Omega)$ é definido por A norma de $H^2(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \sqrt{\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|D^2 u\|^2_{L^2(\Omega)}}, \tag{9}$$

onde

$$\|D^2 u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 \right].$$

Estimativa para o erro da interpolante

Proposição

A interpolante πf satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^2 \|D^2 u\|_{L^2(T)} \tag{10}$$

$$\|\nabla(f - \pi f)\|_{L^2(T)} \leq Ch_T \|D^2 u\|_{L^2(T)} \tag{11}$$

Interpolação contínua e linear por partes - em 2D

O conceito de interpolação contínua e linear por partes é facilmente estendida de uma dimensão para duas ou três dimensões.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere uma malha $\mathcal{T}_h$ sobre Ω. Define-se também o espaço das funções contínuas e lineares por partes sobre Ω

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega) : v|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

A interpolante de f, denotada por $\pi f \in V_h$, é dada por

$$\pi f(x, y) = \sum_{i=1}^{nnos} f(N_i)\varphi_i(x, y), \tag{12}$$

onde $N_1, \cdots, N_{nnos}$ são os $nnos$ pontos nodais e $\{\varphi_1(x, y), \cdots, \varphi_{nnos}(x, y)\}$ é a base nodal de V_h.

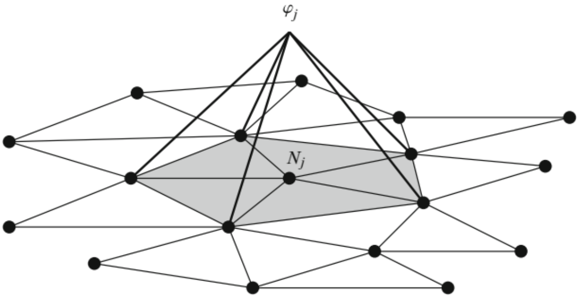

Figure: Função chapéu φ_i em 2D.

Estimativa de Erro

Proposição

A interpolante πf satisfaz as seguintes estimativas:

$$\|f - \pi f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|D^2 u\|^2_{L^2(T)} \tag{13}$$

$$\|\nabla(f - \pi f)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C h_T^2 \|D^2 u\|^2_{L^2(T)}. \tag{14}$$

Bibliografia Básica

- Mats G. Larson and Fredrik Bengzon. The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications. Springer, 2013.
- Alfio Quarteroni. Numerical Models For Differential Problems. Springer, 2009.

Laboratório Nacional de Computação Científica

Muito obrigado!