Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI

Prof. Isaac P. Santos

Tópicos Avançados em Elementos Finitos - 2018/1
Lista 1 - entregar dia 06/04/18

1. Explique a diferença entre os métodos explícitos e implícitos de discretização temporal.

2. Faça duas iterações do método Euler implícito no sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + A\boldsymbol{\xi}(t) &= \boldsymbol{b}, \quad t > 0, \\ \boldsymbol{\xi}(0) &= \boldsymbol{\xi}_0, \end{aligned}$$

   onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Assume que o passo de tempo é $\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2 = 1/2$.

3. Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma u &= f, \quad x \in I = [0, L], \quad t \in J = (0, T], \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

   onde

   - $u = u(x, t)$ é solução procurada,
   - $f = f(x, t)$ é uma função dada (termo de fonte) e
   - $u_0(x)$ é a condição inicial,
   - $\alpha > 0$, $\sigma > 0$.

   a) Determine a formulação variacional desse problema;

   b) Mostre que a discretização espacial desse problema pelo método de elementos finitos conduz a um sistema de EDOs da forma

$$\begin{aligned} M\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + A\boldsymbol{\xi}(t) + \sigma M\boldsymbol{\xi}(t) &= \boldsymbol{b}(t), \qquad t \in J = (0, T] \qquad (1) \\ \boldsymbol{\xi}(0) &= \boldsymbol{\xi}_0. \qquad (2) \end{aligned}$$

   b) Descreva os elementos M_{ij}, A_{ij} e $b_i(t)$ das matrizes M, A e vetor $\boldsymbol{b}(t)$, respectivamente, do item anterior;

4. Considere o problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u &= f, \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in J = (0,T], \\
u(x,y,t) &= 0, \quad \forall (x,y) \in \Gamma \\
u(x,y,0) &= u_0(x,y),
\end{aligned}
$$

onde Γ é a fronteira do domínio Ω, f é uma função dada, u_0 é a condição inicial e $\alpha > 0$.

a) Determine a formulação variacional desse problema;

b) Mostre que a discretização espacial desse problema pelo método de elementos finitos conduz a um sistema de EDOs da forma

$$
\begin{aligned}
M\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + A\boldsymbol{\xi}(t) &= \boldsymbol{b}(t), \qquad t \in J = (0,T] \quad (3) \\
\boldsymbol{\xi}(0) &= \boldsymbol{\xi}_0. \quad (4)
\end{aligned}
$$

b) Descreva os elementos M_{ij}, A_{ij} e $b_i(t)$ das matrizes M, A e vetor $\boldsymbol{b}(t)$, respectivamente, do item anterior;

5. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$
\int_\Omega uv d\Omega \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}
$$