

# Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro Universitário Norte do Espírito Santo - CEUNES

Departamento de Matemática Aplicada - DMA

Prof. Isaac P. Santos - 2018/1

## Aula: Métodos Iterativos Para Sistemas Lineares

# 1 Normas de Vetores e Matrizes

Vamos fornecer uma breve introdução sobre *normas* de vetores e matrizes, que são úteis na discussão de erros e critérios de parada nos métodos iterativos. Normas podem ser definidas em qualquer espaço vetorial. Dado o vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , uma norma de  $\mathbf{x}$ , denotada por  $\|\mathbf{x}\|$ , pode ser interpretado como sendo o comprimento ou magnitude de  $\mathbf{x}$ .

**Definição 1.1.** *Dado o espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^n$ , uma norma (vetorial) em  $V$  é uma função  $\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , satisfazendo as seguintes condições*

- (i)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  (positividade);  $\|\mathbf{x}\| = 0$ , se, e somente se,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (separação);
- (ii)  $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$  para todo escalar  $c \in \mathbb{R}$  (homogeneidade), e
- (iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (desigualdade triangular).

Exemplo de normas vetoriais:

**Norma euclidiana:**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

**Norma um:**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|;$$

**Norma do máximo:**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Essas três normas são casos particulares da *norma-p*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^p \right]^{1/p},$$

onde  $p = 1$  para a norma um,  $p = 2$  para a norma euclidiana e  $p \rightarrow \infty$  para a norma do máximo.

**Definição 1.2.** Chama-se norma de uma matriz  $A$  - em símbolo,  $\|A\|$  - qualquer função definida no espaço vetorial das matrizes  $n \times n$ , com valores em  $\mathbb{R}$ , satisfazendo as seguintes condições

- (i)  $\|A\| \geq 0$  e  $\|A\| = 0$ , se, e somente se,  $A = 0$ ;
- (ii)  $\|cA\| = |c|\|A\|$  para todo escalar  $c$ , e
- (iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (desigualdade triangular).

Exemplo de normas matriciais:

**Norma linha ou do máximo** (escolhe a linha com soma dos elementos máxima):

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

**Norma coluna ou norma um** (escolhe a coluna com soma dos elementos máxima):

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

**Norma euclidiana** (ou Frobenius):

$$\|A\|_E = \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}.$$

**Observação 1.1.** Para essas normas vale:  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

**Definição 1.3.** Uma norma matricial é dita compatível ou consistente com uma norma vetorial, se vale

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$$

para todo  $\mathbf{x}$ .

**Definição 1.4.** Sejam  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  os autovalores da matriz  $A$ ,  $n \times n$ , então

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

é denominado raio espectral de  $A$ .

**Observação 1.2.** Seja  $\rho(A)$  o raio espectral da matriz  $A$ ,  $\lambda_i$  os autovalores e  $\mathbf{x}_i$  os autovetores associados de  $A$ . Então,

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e

$$|\lambda_i| \|\mathbf{x}_i\| = \|A\mathbf{x}_i\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}_i\| \implies |\lambda_i| \leq \|A\|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Em particular,

$$\rho(A) = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\} \leq \|A\|.$$

## 2 Métodos Iterativos Estacionários

Considere o sistema de equações lineares

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

onde  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  invertível onde os elementos da diagonal são diferentes de zero, isto é  $a_{ii} \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Um método *iterativo* para resolver (1) consiste em gerar, a partir de um vetor inicial  $\mathbf{x}^0$ , uma sequência de vetores

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \dots, \mathbf{x}^k, \dots$$

que convirja para a solução  $\mathbf{x}$  do sistema (1), isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}.$$

Os *métodos iterativos estacionários* convertem o sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  no sistema equivalente

$$\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

onde  $M$  é uma matriz  $n \times n$  fixa (por isso o nome *estacionário*), chamada de *matriz de iteração* e  $\mathbf{c}$  é um vetor de ordem  $n$ . Dado um vetor inicial  $\mathbf{x}^0$ , o método iterativo é definido por

$$\mathbf{x}^{k+1} = M\mathbf{x}^k + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (2)$$

**Observação 2.1.** Os métodos baseados em subespaços de Krylov, como os métodos Gradiente Conjugado e GMRES são não estacionários.

### 2.1 Convergência dos métodos iterativos

Um resultado de convergência para o método (2) é dado pelo próximo teorema.

**Teorema 2.1.** O método iterativo (2) é convergente se, e somente se,  $\rho(M) < 1$ , onde  $\rho(M)$  o raio espectral da matriz  $M$ .

A determinação do raio espectral da matriz  $M$  pode requerer maior esforço computacional do que a própria solução do sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Por isso, para alguns métodos iterativos estacionários usualmente se utiliza o **critério das linhas**. Antes de definir o critério das linhas, vamos definir o que é uma matriz estritamente dominante.

**Definição 2.1.** Uma matriz  $A$  é *Diagonal Estritamente Dominante (DED)* se

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1; j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Teorema 2.2** (critério das linhas). Se a matriz  $A$  dos coeficientes é Diagonal Estritamente Dominante (DED) então os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem

A recíproca desse teorema é falsa, ou seja, o critério das linhas é uma condição suficiente para a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, mas não é condição necessária. De fato, existem matrizes que não são DED, mas que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem. A convergência estabelecida pelo critério das linhas não depende a condição inicial  $\mathbf{x}^0$ .

## 2.2 Critério de parada dos métodos iterativos

O processo iterativo (2) é interrompido quando algum critério de parada for satisfeito, como por exemplo, quando o erro relativo entre duas soluções aproximadas sucessivas satisfizer

$$\frac{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^k\|_\infty} \leq tol_\epsilon,$$

com  $tol_\epsilon$  uma tolerância dada, ou quando se escolhe uma quantidade máxima de iterações, isto é,

$$k \geq k_{max}.$$

## 2.3 Método de Jacobi

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) apresentou o método iterativo que recebe seu nome em 1845. O sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j &= b_1 \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j &= b_n \end{aligned}$$

Considerando  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , cada  $x_i$  pode ser escrito explicitamente na  $i$ -ésima equação por

$$x_i = - \sum_{j=1; j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Isso sugere definir um método iterativo da seguinte forma: dado  $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ , obter  $\mathbf{x}^{k+1} = (x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1})$  por

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1; j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

### 2.3.1 Forma Matricial do Método de Jacobi

Para uma descrição em forma matricial do algoritmo de Jacobi, considere uma decomposição da matriz  $A$  da seguinte forma

$$A = L + D + U,$$

onde

- $L$  é uma matriz triangular estritamente inferior com  $l_{ii} = a_{ij}$  se  $i > j$  e  $l_{ii} = 0$  se  $i \leq j$ ;
- $D$  é uma matriz diagonal com  $d_{ii} = a_{ii}$ ;
- $U$  é uma matriz triangular estritamente superior com  $u_{ii} = a_{ij}$  se  $i < j$  e  $u_{ii} = 0$  se  $i \geq j$ .

Então, o sistema a ser resolvido é escrito como

$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ou

$$D\mathbf{x} = -(L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Como  $\det D = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$ , segue que  $D^{-1}$  existe e

$$\mathbf{x} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

Esta igualdade pode ser convertida em um processo iterativo formando a recorrência

$$\mathbf{x}^{k+1} = M_J\mathbf{x}^k + \mathbf{c},$$

onde

- i)  $M_J = -D^{-1}(L + U)$  é a matriz de iteração do método de Jacobi;
- ii)  $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$ .

**Observação 2.2.**  $D^{-1} = \left[ \frac{1}{d_{ii}} \right]$ .

## 2.4 Método de Gauss-Seidel

Em geral, a convergência do método de Gauss-Seidel é mais rápida do que a do método de Jacobi, mas existem exemplos para os quais o método de Gauss-Seidel diverge e o método de Jacobi converge. Cada  $x_i$  pode ser escrito explicitamente na  $i$ -ésima equação por

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

O método de Gauss-Seidel é descrito como

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde os valores  $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$  são computados na iteração  $k+1$ , enquanto que os valores  $x_{i+1}^k, \dots, x_n^k$  são calculados na iteração anterior.

### 2.4.1 Forma Matricial do Método de Gauss-Seidel

Considerando uma decomposição da matriz  $A$

$$A = L + D + U,$$

onde  $D$  é uma matriz diagonal e  $L$  e  $U$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas (similarmente como no método de Jacobi), então o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  resulta em

$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ou

$$(L + D)\mathbf{x} = -U\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Como  $\det(L + D) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$ , segue que  $(L + D)^{-1}$  existe e

$$\mathbf{x} = -(L + D)^{-1}U\mathbf{x} + (L + D)^{-1}\mathbf{b}.$$

Esta igualdade pode ser convertida em um processo iterativo formando a recorrência

$$\mathbf{x}^{k+1} = M_{GS}\mathbf{x}^k + \mathbf{c}, \tag{3}$$

onde

- i)  $M_{GS} = -(L + D)^{-1}U$  é a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel;
- ii)  $\mathbf{c} = (L + D)^{-1}\mathbf{b}$ .

A expressão (3) não é a forma mais prática para implementar o método de Gauss-Seidel, pois a matriz de iteração envolve o cálculo da inversa  $(L + D)^{-1}$ . Uma forma mais prática de implementar este método é descrita a seguir. Partindo de

$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

obtemos

$$(L + D)\mathbf{x} = -U\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Descrevemos então o processo iterativo

$$(L + D)\mathbf{x}^{k+1} = -U\mathbf{x}^k + \mathbf{b}.$$

Segue então que

$$D\mathbf{x}^{k+1} = -L\mathbf{x}^{k+1} - U\mathbf{x}^k + \mathbf{b}.$$

Como  $D$  é inversível, obtemos

$$\mathbf{x}^{k+1} = -D^{-1}L\mathbf{x}^{k+1} - D^{-1}U\mathbf{x}^k + D^{-1}\mathbf{b}. \quad (4)$$

Para avaliar a convergência do método de Gauss-Seidel, além do critério das linhas, existe também o critério de Sassenfeld.

**Teorema 2.3** (Critério de Sassenfeld). *Considere o sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , com  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se*

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right] < 1, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n,$$

*então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência de soluções aproximadas que converge para a solução do sistema linear, independentemente da condição inicial  $\mathbf{x}^0$  utilizada. Quanto menor  $\beta = \max_{i=1,\dots,n} \{\beta_i\}$ , mais rápida é a convergência.*

## 2.5 Observações

- Os critérios das linhas (para os métodos Jacobi e Gauss-Seidel) de Sassenfeld (para o método de Gauss-Seidel) são condições **suficientes**, mas **não necessárias** para a convergência.
- Se o critério das linhas ou de Sassenfeld não for satisfeito, devemos tentar uma permutação de linhas de forma a obtermos uma disposição para a qual a matriz dos coeficientes satisfaça esses critérios. Neste caso, aplique o método a esse "novo" sistema (com as linhas permutadas). Nem sempre é possível obter tal disposição.

## 2.6 Método da Sobre-relaxação Sucessiva (SOR)

O método SOR é um melhoramento do método de Gauss-Seidel. Sua relação de recorrência é dada por

$$x_i^{k+1} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right] + (1 - \omega)x_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O parâmetro  $\omega$  é utilizado para acelerar a convergência do processo iterativo acima nos problemas que podem ser resolvidos pelo método de Gauss-Seidel. Quando  $\omega = 1$  o método SOR torna-se o método de Gauss-Seidel.

Em geral, a escolha ótima do valor de  $\omega$  não é conhecida. Os resultados a seguir nos fornecem algumas informações importantes.

**Teorema 2.4** (Kahan). *Dado o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , se  $a_{ii} \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , então*

$$\rho(M_\omega) \geq |\omega - 1|,$$

onde  $M_\omega$  é a matriz de iteração do método SOR.

Já vimos que um método iterativo converge se, e somente se,  $\rho(M) < 1$ . Supondo  $\rho(M_\omega) < 1$ , pelo teorema anterior,

$$|\omega - 1| \leq \rho(M_\omega) < 1,$$

isto é,

$$0 < \omega < 2.$$

Então se o método SOR converge (caso em que  $\rho(M_\omega) < 1$ ),  $0 < \omega < 2$ . A recíproca é falsa, pois se  $\omega \in (0, 2)$  não temos garantia que  $\rho(M_\omega) < 1$ . Portanto, se  $0 < \omega < 2$  não necessariamente o método SOR converge.

O método SOR diverge se  $\omega < 0$  ou  $\omega > 2$ . Usualmente, utiliza-se  $1 < \omega < 2$  para o método SOR.

**Teorema 2.5** (Ostrowski-Reich). *Dado o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  com  $A$  uma matriz simétrica e definida positiva e  $0 < \omega < 2$ , então o método SOR converge, independentemente da escolha da condição inicial  $\mathbf{x}^0$ .*

### 3 Comparação entre métodos diretos e iterativos

Os métodos numéricos para resolver sistemas de equações lineares podem ser divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos.

Os métodos diretos são aqueles, que a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, em um número finito de operações.

Os métodos iterativos geram uma sequência de vetores, a partir de uma condição inicial. Sob certas condições, essa sequência converge para a solução exata do sistema linear, caso ela exista.

A seguir, faremos uma comparação entre essas duas classes de métodos, em relação a convergência, esparsidade da matriz dos coeficientes e os erros de arredondamentos.

#### 3.1 Convergência

Os métodos diretos são processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema não singular de equações. Já os métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

#### 3.2 Esparsidade da matriz dos coeficientes

Uma matriz é esparsa se possui uma grande quantidade de elementos nulos. Matrizes esparsas têm aplicações em problemas de engenharia, física, matemática, computação, etc. Existem estruturas de

dados eficientes para manipular matrizes esparsas, onde apenas os elementos não nulos são armazenados.

Os métodos diretos quando aplicados a sistemas esparsos provocam *preenchimento* da matriz, isto é, durante o processo de eliminação poderão surgir elementos não nulos em posições  $a_{ij}$  que originalmente eram nulas. Portanto se a matriz dos coeficientes for esparsa e de grande porte, uma desvantagem dos métodos diretos para a solução dos sistema linear associado é o *preenchimento* da matriz, exigindo técnicas especiais para a escolha do pivô para reduzir este preenchimento.

A principal vantagem dos métodos iterativos é o fato de não alterarem a estrutura da matriz dos coeficientes.

### 3.3 Erros de arredondamento

Os métodos diretos apresentam sérios problemas com erros de arredondamento. Uma forma de amenizar esses problemas é o uso de técnicas de pivoteamento.

Os métodos iterativos têm menos erros de arredondamento, visto que a convergência, uma vez assegurada, independe da condição inicial. Desta forma, somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução, pois os erros cometidos nas iterações anteriores não levarão à divergência do processo (nem à convergência a um outro vetor que não seja a solução).

## 4 Referências Bibliográficas

1. Frederico F. Campos. **Algoritmos Numéricos**. LTC, 2a Ed. Rio de Janeiro, 2007.
2. Décio S., João T. Mendes e Luiz H. M. Silva. **Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais do métodos numéricos**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.
3. Neide B. Franco. **Cálculo Numérico**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.
4. Endre Süli and David F. Mayers. **An Introduction to Numerical Analysis**. University of Oxford, 2003
5. Marcia A. G. Ruggiero e Vera L. R. Lopes. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2a edição, 2013.