Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro Universitário Norte do Espírito Santo - CEUNES

Departamento de Matemática Aplicada - DMA

Prof. Isaac P. Santos - 2018/1

Aula: Análise de Erro

É importante analisar como pequenas variações nos elementos da matriz dos coeficientes e/ou no vetor dos termos independentes influenciam a solução do sistema linear.

1 Condicionamento de sistemas lineares

No processo de solução de sistemas lineares, dois aspectos devem ser considerados:

a) A questão da existência de solução, isto é, se a solução do sistema existe ou não;

b) A escolha de um método eficiente para resolver o sistema linear.

Existe ainda um outro aspecto muito importante que não deve ser desprezado:

a) A questão da sensibilidade da solução a pequenas mudanças nos coeficientes do sistema linear.

Quando a solução do sistema linear é sensível a pequenas mudanças nos coeficientes, dizemos que o sistema é **mal condicionado**. O mal condicionamento está relacionado ao fato de que a matriz dos coeficientes está *próxima* de ser singular (seu determinante é quase nulo).

Seja $Ax = b$, onde A é uma matriz $n \times n$ invertível. Se pertubarmos a inversa de A, isto é, A^{-1}, obtemos uma nova matriz B. Consequentemente, a solução pertubada será

$$\widetilde{x} = Bb.$$

Como medir essa pertubação em termos absolutos e relativos?

Usando um *norma compatível com uma norma vetorial*, obtemos

$$\|x - \widetilde{x}\| = \|x - Bb\| = \|x - BAx\| = \|(I - BA)x\| \leq \|I - BA\|\|x\|.$$

Dessa forma, a *pertubação relativa* é dada por

$$\frac{\|x - \widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|I - BA\|. \tag{1}$$

A equação (1) fornece um limite superior para $\|x - \widetilde{x}\|/\|x\|$, tomado como um erro relativo entre x e $\widetilde{x}$.

Por outro lado, se pertubarmos o vetor b obtemos um novo vetor $\widetilde{b}$ de forma que x e $\widetilde{x}$ satisfazem

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A\widetilde{x} &= \widetilde{b}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|x-\widetilde{x}\| = \|A^{-1}b - A^{-1}\widetilde{b}\| = \|A^{-1}(b-\widetilde{b})\| \leq \|A^{-1}\|\|b-\widetilde{b}\|,$$

fornecendo uma medida para o *erro absoluto* entre x e $\widetilde{x}$. Para estimar uma *medida relativa do erro*, fazemos

$$\begin{aligned} \|x-\widetilde{x}\| &\leq \|A^{-1}\|\|b-\widetilde{b}\| = \|A^{-1}\|\|Ax\|\frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|} \\ &\leq \|A^{-1}\|\|A\|\|x\|\frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}. \tag{2}$$

Segundo a equação (2), o erro relativo em x é limitado superiormente por $\kappa(A)$ vezes o erro relativo em b, onde

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \tag{3}$$

é chamado de ***número de condição*** da matriz A. Note que $\kappa(A)$ depende da norma utilizada.

Observação 1.1.

a) Temos que $\kappa(A) \geq 1$. *De fato,*

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1;$$

b) Se $\kappa(A)$ *é grande, então pequenas pertubações relativas no vetor* b *produzirão grandes pertubações relativas em* x*, e o sistema* $Ax = b$ *é mal condicionado;*

a) $\kappa(A)$ *será considerado grande quando valer por volta de* 10^4 *ou mais.*

Exercício 1.1. *Mostre que se considerarmos uma pertubação na matriz* A*, obtemos*

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|\widetilde{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}. \tag{4}$$

Resolvendo um sistema de equações lineares $Ax = b$ *numericamente*, não obtemos a solução exata, mas uma solução aproximada $\widetilde{x}$. Seja

$$r = b - A\widetilde{x} = b - \widetilde{b}.$$

o vetor residual. O vetor erro é a diferença entre a solução exata x e a aproximada $\widetilde{x}$, dado por

$$e = x - \widetilde{x}.$$

Portanto

$$Ae = Ax - A\widetilde{x} = b - A\widetilde{x} = r.$$

Queremos relacionar o erro relativo $\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|}$ com $\frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|} = \frac{\|r\|}{\|b\|}$.

Teorema 1.1.

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

Demonstração:

$Ae = r$ e $Ax = b$ implicam em $\|e\| \leq \|A^{-1}\|\|r\|$ e $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$. Logo,

$$\|e\|\|b\| \leq \|A^{-1}\|\|A\|\|r\|\|x\|$$

e

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

Por outro lado, $\|r\| \leq \|A\|\|e\|$ e $\|x\| \leq \|A^{-1}\|\|b\|$. Logo,

$$\|r\|\|x\| \leq \|A^{-1}\|\|A\|\|e\|\|b\|$$

e

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|}.$$

Exemplo 1.1. *Considere*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \qquad A^{-1} = \epsilon^2 \begin{bmatrix} 1 & -1-\epsilon \\ -1+\epsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando a norma do máximo $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, obtemos $\|A\|_\infty = 2+\epsilon$ e $\|A^{-1}\|_\infty = (2+\epsilon)\epsilon^{-2}$. Então,

$$\kappa(A) = \left(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)^2 > \frac{4}{\epsilon^2}.$$

Se $\epsilon \leq 0.01$ então $\kappa(A) \geq 40000$. Uma pequena pertubação em b ou A pode induzir uma pertubação relativa 40000 vezes maior na solução de $Ax = b$.

Exemplo 1.2. *Considere o sistema linear $Ax = b$, com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix} \qquad e \qquad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix}.$$

A solução exata deste sistema é $x = [1 \quad 1]^T$. Seja o vetor $\widetilde{b} = [1.99 \quad 1.98]^T \approx b$. A solução exata do sistema $Ay = \widetilde{b}$ é $y = [100 \quad -99]^T$. Portanto, uma pequena modificação no vetor b acarretou uma grande modificação na solução do problema. Considere agora uma pertubação na matriz A dada por

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.99 \end{bmatrix} \approx A.$$

A solução exata do sistema $\widetilde{A}z = b$ é $z = [2 \quad -1/99]^T$, ou seja, uma pequena pertubação na matriz A ocasionou uma grande mudança na solução. Calcule $\kappa(A)$.

Exemplo 1.3. *Um exemplo de matriz mal-condicionada é a matriz de* Hilbert*(1894) dada por*

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Por exemplo, a matriz de Hilbert de ordem 3 é

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Observação 1.2. *O malcondicionamento é devido à quase singularidade da matriz A dos coeficientes, ou seja,* $\det A \approx 0$. *Cuidado ! nem toda matriz que tem determinante pequeno é malcondicionada. O determinante da matriz malcondicionada do exemplo anterior é* $\det A = -10^{-4}$. *Por outro lado, a matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 \\ -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}$$

tem $\det B = 2 \times 10^{-6}$ *e, no entanto, é muito bem condicionada. Seu determinante é pequeno porque seus elementos são pequenos.*

Observação 1.3. *O melhoramento do condicionamento de sistemas lineares é feito através da técnica numérica chamada* ***precondionamento****, que é muito utilizada na solução de sistemas lineares de grande porte.*

1.1 Condicionamento de Matrizes no Matlab

Em Matlab (ou Octave) podemos obter o número de condição de uma matriz A através do comando

```
>> cond(A)
```

Neste caso, a norma utilizada é a norma-p com $p = 2$. Podemos utilizar em Matlab outra norma-p especificando o valor de p, que pode ser 1 ou inf ou $'fro'$ e fazendo

```
>> cond(A,p)
```

Podemos também calcular o número de condição de uma matriz A usando o comando

```
>> norm(A,p)*norm(inv(A),p)
```

para algum p especificado. Podemos criar também a matriz de Hilbert $A = \frac{1}{i+j-1}$ através do comando `hilb`. Por exemplo, para criar uma matriz de Hilbert A de tamanho 5 faça

```
>> A = hilb(5)
```

2 Referências Bibliográficas

1. Frederico F. Campos. **Algoritmos Numéricos**. LTC, 2a Ed. Rio de Janeiro, 2007.

2. Décio S., João T. Mendes e Luiz H. M. Silva. **Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais do métodos numéricos**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.

3. Neide B. Franco. **Cálculo Numérico**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

4. Endre Süli and David F. Mayers. **An Introduction to Numerical Analysis**. University of Oxford, 2003

5. Marcia A. G. Ruggiero e Vera L. R. Lopes. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2a edição, 2013.