Método Estabilizados Para Problemas de Convecção-Difusão-Reação

Prof. Isaac P. Santos

Disciplina: Elementos Finitos - **2012/2**
Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES,
isaac.santos@ufes.br

Universidade Federal do Espírito Santo

Sumário

Equação de Convecção-Difusão-Reação

Achar $u = u(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} -\epsilon \triangle u + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u + \sigma u &= f, \text{ em } \Omega; \\ u &= g, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado com fronteira poligonal, $\Gamma = \partial\Omega$;
- $u : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $\sigma \geq 0$ e $\epsilon > 0$ são constantes, $f \in L^2(\Omega)$;
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$, $g = 0$.

Aplicações

Modelagem matemática de vários problemas em engenharia e ciências naturais:

- eletro-química;
- turbulência;
- dinâmica de populações;
- acústica;

$\Longrightarrow$ transporte em geral.

Formulação Variacional

Achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear dada por

$$B(u,v) = \int_\Omega \Big(\epsilon \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u) v + \sigma u v \Big) d\Omega;$$

e (f,v) é uma forma linear (produto interno) em $L^2(\Omega)$ dado por

$$(f,v) = \int_\Omega f v d\Omega.$$

$\boxed{\textbf{Lema de Lax-Milgram} \Rightarrow \text{Existência e unicidade de solução}}$

Universidade Federal do Espírito Santo

Método de Galerkin - Problema Discreto

Achar $u_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega).$$

Análise de Convergência : $\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \dfrac{max\{|\beta|_\infty, \sigma\}}{\epsilon} h|u|_{H^2}$.

- $\alpha = \frac{|\beta|_\infty h}{2\epsilon}$ (Péclet local);
- $\gamma = \frac{\sigma h}{|\beta|_\infty}$ (Damköhler local).

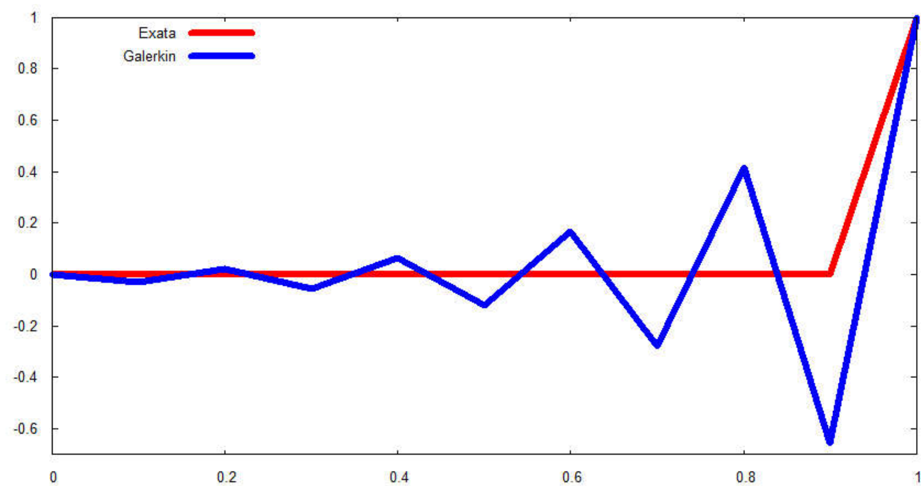
Dificuldades Numéricas:

$$\epsilon << |\beta|_\infty h \quad \text{e/ou} \quad \epsilon << \sigma h^2.$$

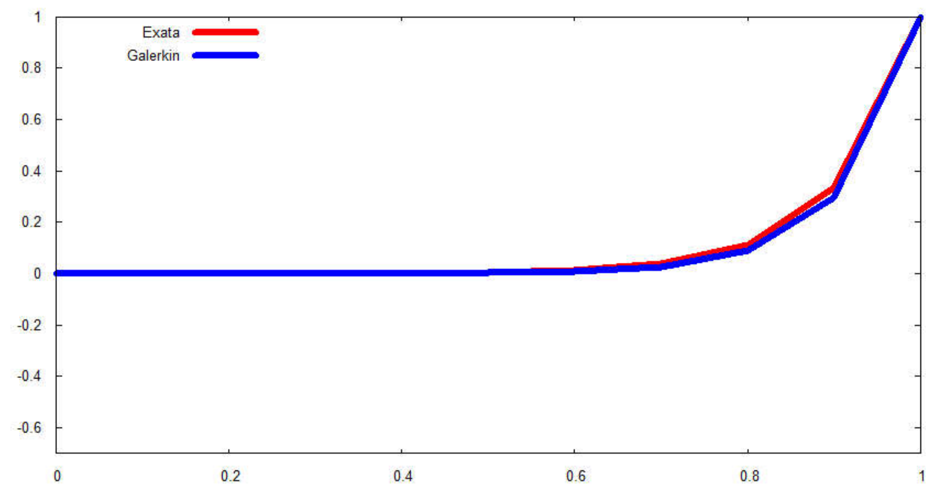
Método de Galerkin

Exemplo 01: Equação Convecção-Difusão-Reação Unidimensional

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' + u &= 0 \text{ em } (0,1); \\ u(0) &= 0; \\ u(1) &= 1. \end{cases}$$



(a) $\epsilon = 0.01$ - Peclet $= 5$



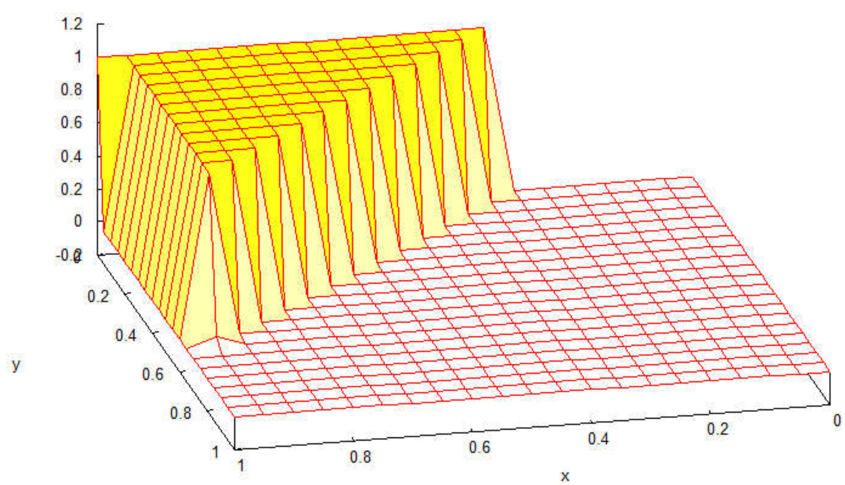
(b) $\epsilon = 0.1$ - Peclet $= 0.5$

Método de Galerkin

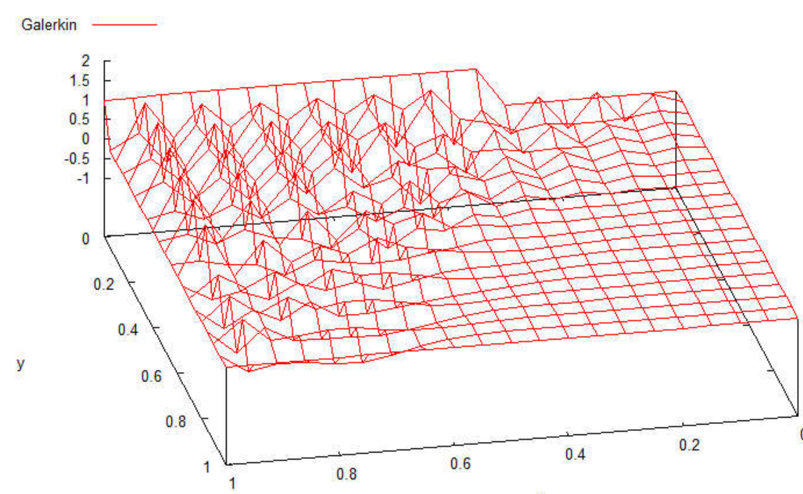
Exemplo 02: Equação de Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-12}; \qquad \beta = (1,1)^T; \qquad f = 0.$$

Condições de Contorno: $u = \begin{cases} 1 & \text{para } 0.3 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$



(c) Solução Exata



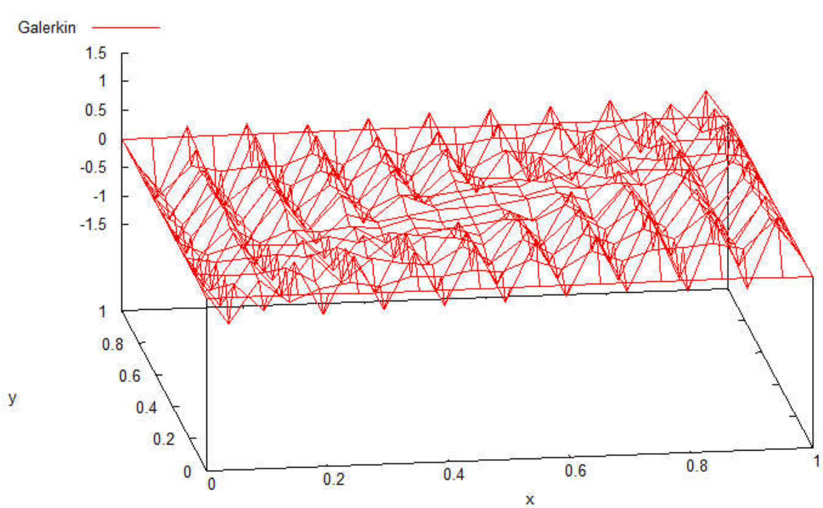
(d) Método de Galerkin

Método de Galerkin

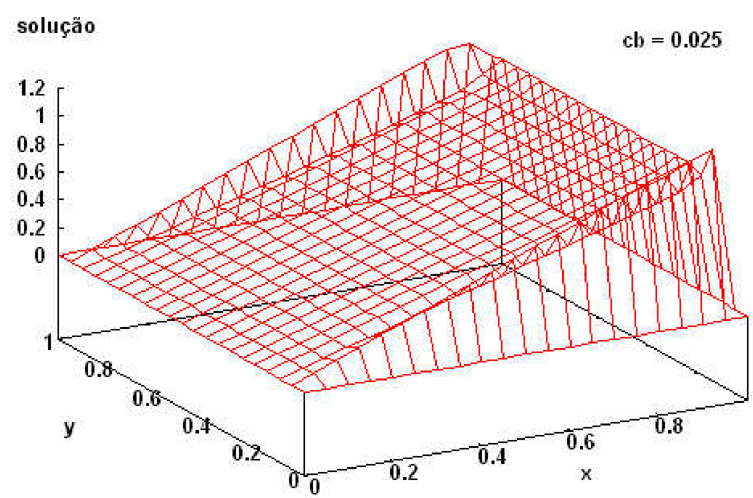
Exemplo 03: Equação de Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-9}; \qquad \beta = (1,0)^T; \qquad f = 1.$$

Condições de Contorno de Dirichlet Homogêneas: $u(x,y) = 0$ em Γ.



(e) Método de Galerkin



(f) Método SGS

Métodos Variacionais Estabilizados

Consistem em adicionar um termo à forma bilinear $B(\cdot,\cdot)$, sem comprometer a *consistência* do método de Galerkin clássico:

$$\boxed{\text{Mét. Estabilizado}} = \boxed{\text{Mét. Galerkin}} + \boxed{\text{Termo de Pertubação}}$$

Achar $u_h \in X_h$ tal que

$$B(u_h, v_h) + E(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in X_h.$$

Os métodos estabilizados também são conhecidos como métodos de **Petrov-Galerkin**.

Métodos Variacionais Estabilizados

Achar $u_h \in X_h$ tal que

$$B(u_h, v_h) + E(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in X_h,$$

onde

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)\tau_h \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

- $\mathcal{P}(\cdot)$ é um operador aplicado no espaço das funções testes - caracteriza cada método estabilizado;
- τ_h é um parâmetro de estabilização;
- $(\mathcal{L}u_h - f) = R(u_h)$ é o resíduo da equação diferencial.

Métodos Variacionais Estabilizados

Método SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) (Brooks e Hughes, 1982; Johnson et al., 1984);

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)\tau_h \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

No método SUPG, o operador $\mathcal{P}(\cdot)$ é dado por

$$\mathcal{P}(v_h) = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h.$$

O resíduo da equação de difusão-convecção-reação é

$$\mathcal{L}u_h - f = -\epsilon \triangle u_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_h + \sigma u_h - f$$

e o parâmetro de estabilização está no próximo slide.

Universidade Federal do Espírito Santo

Métodos Variacionais Estabilizados

Parâmetro de Estabilização do método SUPG:

$$\tau_h = \frac{h}{2|\beta|}\xi$$

$$\xi = max\{0, 1 - \frac{1}{Peclet}\}$$

Obs: O método SUPG, aplicado ao problema de convecção-difusão estacionário, unidimensional, com $f = 0$, com coeficientes constantes e usando interpolação linear é nodalmente exato com

$$\tau_h = \frac{h}{2|\beta|}\left(coth(Peclet) - \frac{1}{Peclet}\right).$$

Métodos Variacionais Estabilizados

Método GLS (*Galerkin/Least Squares*) (Hughes, Franca e Hulbert, 1989);

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)\tau_h \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

No método GLS, o operador $\mathcal{P}(\cdot)$ é dado por

$$\mathcal{P}(v_h) = \mathcal{L}v_h = -\epsilon \triangle v_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h + \sigma v_h.$$

O resíduo da equação de difusão-convecção-reação é

$$\mathcal{L}u_h - f = -\epsilon \triangle u_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_h + \sigma u_h - f.$$

Em geral, utiliza o mesmo parâmetro de estabilização do método SUPG.

Universidade Federal do Espírito Santo

Métodos Variacionais Estabilizados

Método USFEM (*Unusual Finite Element Method*) (Franca e Valentim, 2000);

$$E(u_h, v_h) = \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} \int_{T_h} (\mathcal{L}u_h - f)\tau_h \mathcal{P}(v_h) d\Omega.$$

No método GLS, o operador $\mathcal{P}(\cdot)$ é dado por

$$\mathcal{P}(v_h) = -\epsilon \triangle v_h - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h + \sigma v_h.$$

O resíduo da equação de difusão-convecção-reação é

$$\mathcal{L}u_h - f = -\epsilon \triangle u_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_h + \sigma u_h - f.$$

O parâmetro de estabilização do método USFEM está no próximo slide.

Universidade Federal do Espírito Santo

Métodos Variacionais Estabilizados

Parâmetro de Estabilização do método USFEM:

$$\tau_h = \frac{1}{\frac{2\epsilon}{m_k h^2}\zeta(Pe_2) + \sigma\zeta(Pe_1)}$$

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ x, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

$$Pe_1 = \frac{2\epsilon}{m_k \sigma h^2}, Pe_2 = \frac{m_k |\beta| h}{\epsilon},$$

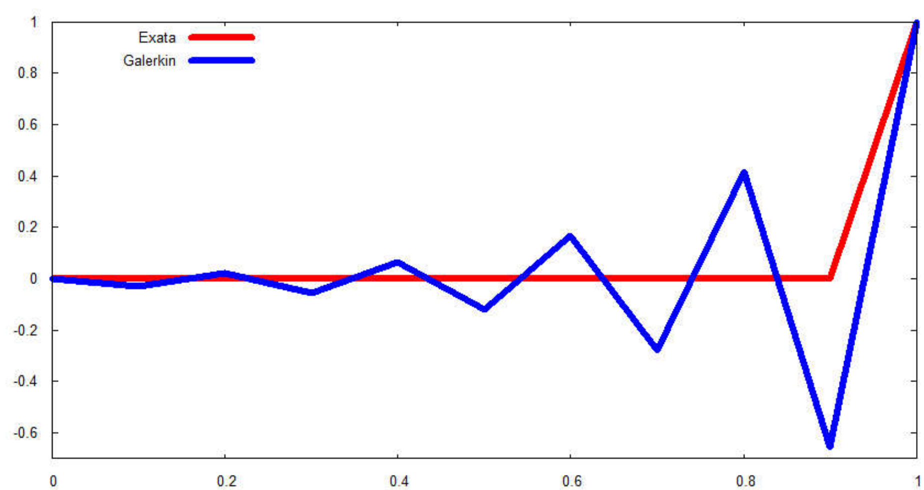
$$m_k = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{ elementos lineares}$$

Universidade Federal
do Espírito Santo

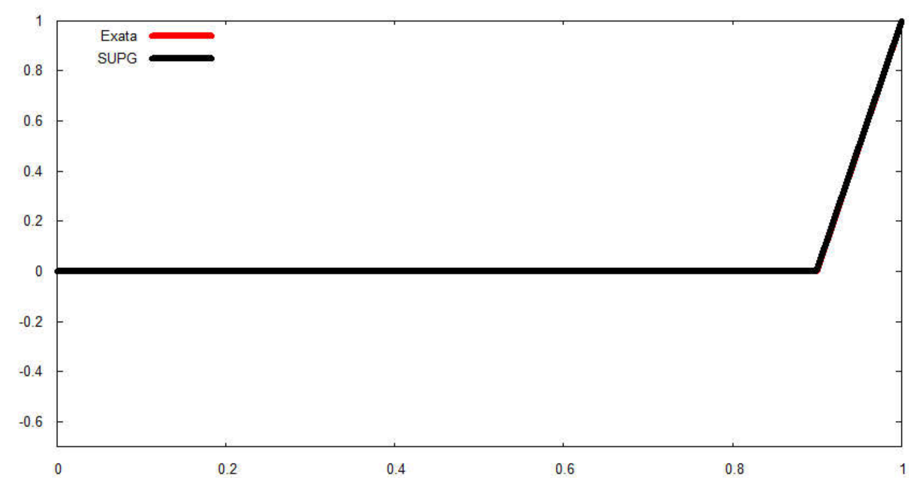
Experimentos Numéricos - método SUPG

Exemplo 03: Equação Convecção-Difusão-Reação Unidimensional

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' + u & = 0 \text{ em } (0,1); \\ u(0) & = 0; \\ u(1) & = 1. \end{cases}$$



(g) Galerkin X Exata



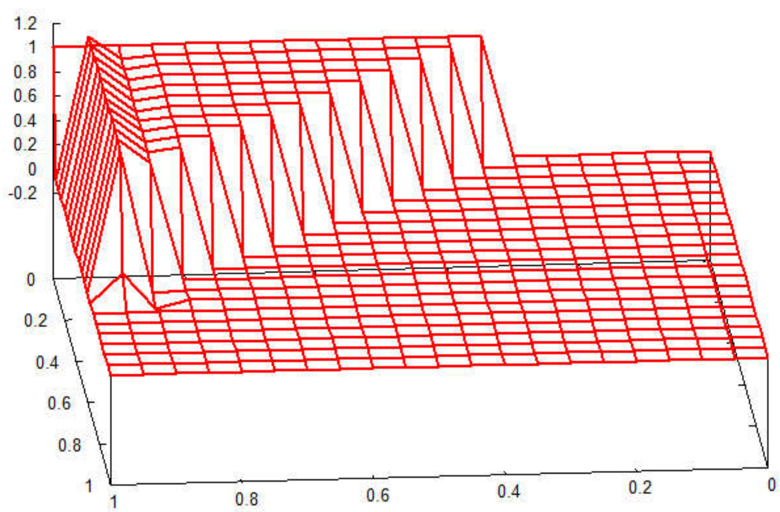
(h) SUPG X Exata

Experimentos Numéricos - método SUPG

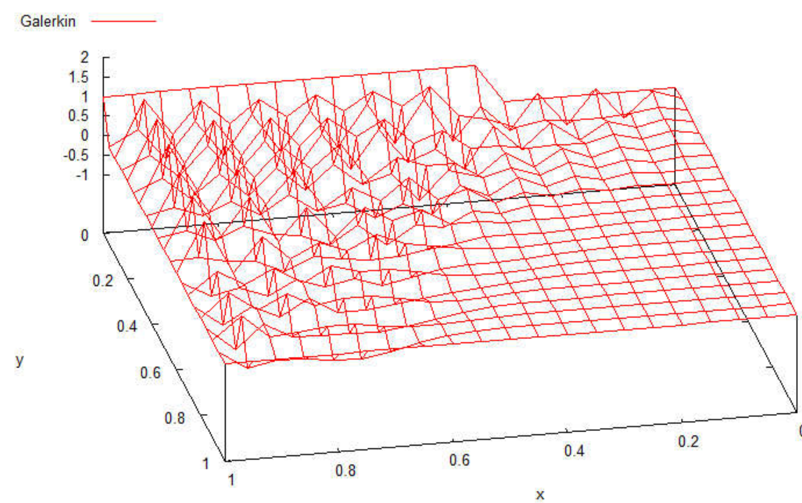
Exemplo 04: Equação Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-12}; \qquad \beta = (1,1)^T; \qquad f = 0.$$

Condições de Contorno: $u = \begin{cases} 1 & \text{para } 0.3 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$



(i) Solução SUPG



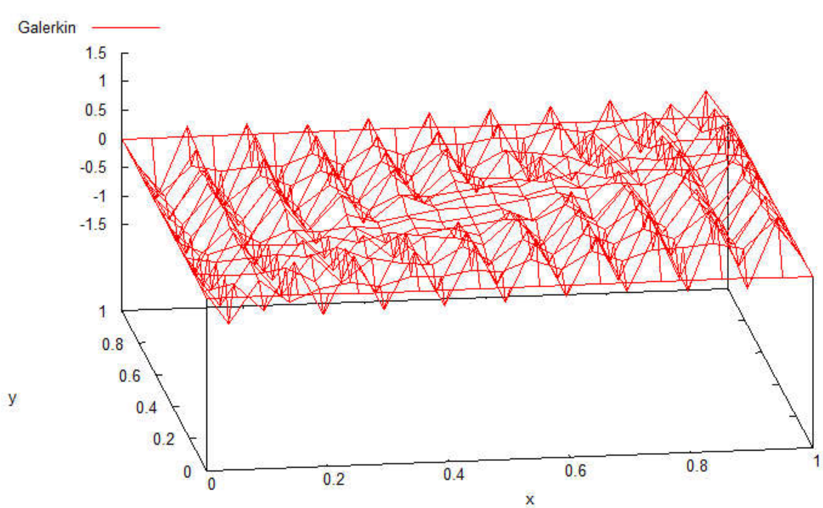
(j) Método de Galerkin

Experimentos Numéricos - método SUPG

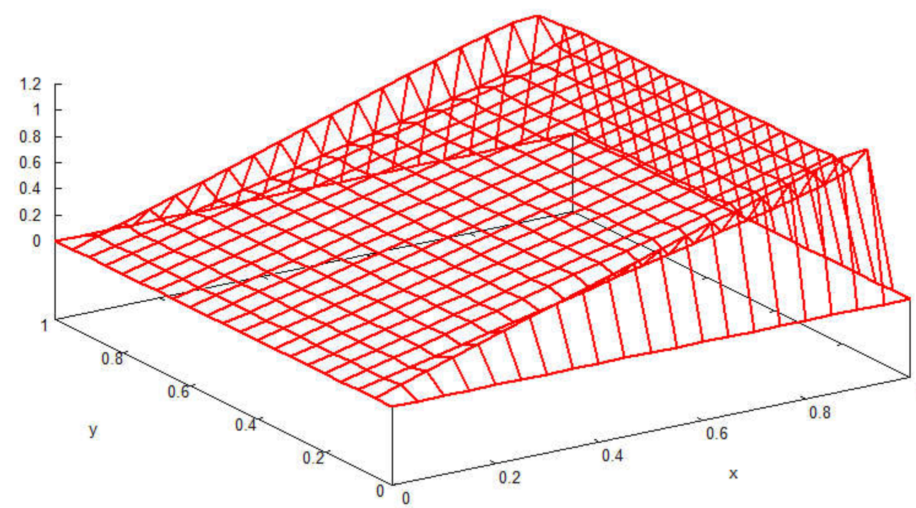
Exemplo 05: Equação Convecção-Difusão Bidimensional

$$\epsilon = 10^{-9}; \qquad \beta = (1,0)^T; \qquad f = 1.$$

Condições de Contorno de Dirichlet Homogêneas: $u(x, y) = 0$ em Γ.



(k) Método de Galerkin



(l) Método SUPG