Função delta de Dirac

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Paraná, Brasil

15 de abril de 2013

O físico teórico inglês Paul Adrian Maurice Dirac introduziu, na década de 1930, a chamada função delta $\delta(x)$, como um recurso matemático útil na descrição da mecânica quântica, da qual foi um dos principais criadores [1]. Posteriormente foram descobertas outras situações em que a função delta pode ser usada. A rigor, no entanto, $\delta(x)$ não é uma função, de fato, o que, a princípio, causou um certo desconforto entre os matemáticos. Foi somente a partir da década de 1940 que um grupo de matemáticos, entre os quais o francês Laurent Schwartz, desenvolveu uma teoria rigorosa para a função delta, na qual ela é considerada uma função generalizada, ou distribuição. Em boa parte das manipulações formais, no entanto, a função delta pode ser trabalhada como uma função usual, e será este o enfoque deste capítulo. As demonstrações de que tais resultados são matematicamente rigorosos é objeto da Teoria das Distribuições, que não será abordada aqui [2, 3, 4, 5].

1 Função delta de Dirac

1.1 Definição

A "função" delta de Dirac é definida por meio das seguintes propriedades:

$$\boxed{\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } x = 0, \end{cases}} \tag{1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,} \tag{2}$$

onde $-\infty < x < \infty$ é um real. Não se define a "função" delta para argumentos complexos.

A "função" delta definida em (1)-(2) é aplicada em $x = 0$. Podemos generalizar para o caso em que é aplicada em $x = a$:

$$\boxed{\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq a, \\ \infty, & \text{se } x = a, \end{cases}} \tag{3}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1,} \tag{4}$$

A rigor $\delta(x)$ não é uma função, e sim o que chamamos de distribuição, ou função generalizada. Por exemplo, se $\delta(0)$ é igual a infinito, se interpretarmos a integral em (2) no sentido de Riemann - como o limite de uma soma - chegaríamos a um resultado também infinito, ao invés de ser igual a um. No entanto, para muitas aplicações $\delta(x)$ obedece às regras do cálculo aplicáveis a funções bem-comportadas. Por isso deixaremos doravante de colocar aspas na palavra função.

2 Aplicações físicas

2.1 Mecânica clássica: forças impulsivas

Suponha uma esfera de massa m e velocidade constante v, numa trajetória unidimensional, chocando-se elasticamente com uma parede rígida. Devido à elasticidade da esfera, a colisão tem uma duração Δt, tempo durante o qual há uma transferência de momentum entre a esfera e a parede e *vice-versa*. O impulso sobre a esfera é dado por

$$I = \int_{t_0-\Delta t/2}^{t_0+\Delta t/2} F(t)dt, \tag{5}$$

onde t_0 indica o instante médio em que ocorre a colisão, e $F(t)$ é a força dependente do tempo que a parede exerce sobre a esfera [Fig. 1]. Do teorema do impulso e momentum linear, temos que

$$I = \Delta p = p_f - p_i = mv - (-mv) = 2mv = constante, \tag{6}$$

de modo que, se o intervalo de tempo Δt diminuir, o valor máximo da força $F_{max} = F(t_0)$ irá aumentar para que o impulso permaneça constante.

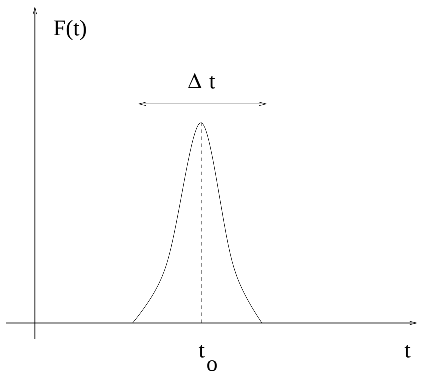

Figura 1: Uma força impulsiva.

No limite quando $\Delta t \to 0$, podemos escrever a força impulsiva usando a função delta de Dirac

$$F(t) = I\delta(t - t_0). \tag{7}$$

Com efeito, usando (4) temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} I\delta(t - t_0)dt = I \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt}_{=1} = I.$$

2.2 Eletromagnetismo: distribuições singulares de carga elétrica

Uma carga puntiforme q situada, ao longo do eixo x, na posição $x = a$, equivale a uma distribuição singular de carga elétrica, cuja densidade (linear) é

$$\mu(x) = \frac{dq}{dx} = q\delta(x - a), \tag{8}$$

pois, integrando sobre todo o eixo, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} q\delta(x - a)dx = q \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)dx}_{=1} = q.$$

Uma corrente elétrica filamentar i também podem ser representada, usando funções delta multidimensionais (a serem vistas mais à frente), como densidades superficiais de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ singulares, já que

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dA} = i.$$

2.3 Mecânica quântica: espectro contínuo

[1]

Na mecânica quântica a informação que podemos obter de um sistema está inteiramente contida na respectiva função de onda $\psi(x)$. As observáveis físicas são representadas por operadores hermitianos $\hat{A}$, que têm autofunções $\phi_n(x)$ associadas aos autovalores a_n, tais que

$$\hat{A}\phi_n(x) = a_n\phi_n(x). \tag{9}$$

Os autovalores a_n são os únicos resultados possíveis para medidas da observável A sobre o sistema descrito pela função de onda $\psi(x)$. O conjunto de autovalores de um operador é o seu "espectro", o qual pode ser discreto (finito ou infinito enumerável) ou contínuo (infinito não-enumerável).

As autofunções $\phi_n(x)$ formam um conjunto completo e ortonormal (= ortogonal + normalizado) de funções. No espectro discreto essa propriedade se exprime como

$$< \phi_n(x)|\phi_m(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm}, \tag{10}$$

onde o delta de Krönecker é definido como:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m, \end{cases} \tag{11}$$

o que permite escrevermos a função de onda como uma combinação linear das autofunções ("postulado da expansão"):

$$\psi(x) = \sum_n c_n\phi_n(x). \tag{12}$$

Certas observáveis, como a energia do oscilador harmônico, têm um espectro discreto, porém outras, como a posição de uma partícula livre, têm um espectro contínuo. O análogo da equação (9) para o operador de posição será

$$\hat{x}\phi(x) = x\phi(x), \tag{13}$$

onde $\phi(x)$ é a autofunção associada ao autovalor x de posição. Para exprimir a ortonormalidade destas autofunções, ou seja, escrever o análogo da propriedade (10) para o espectro contínuo, Dirac introduziu a função delta para

[1]Esta subseção pode ser omitida pelos alunos que ainda não estudaram Mecânica Quântica.

que

$$< \phi(x)|\phi(x') >= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\phi(x')dx = \delta(x-x') = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq x', \\ \infty, & \text{se } x = x', \end{cases} \tag{14}$$

ou seja, algo como uma versão no espectro contínuo do delta de Krönecker. O postulado da expansão será escrito com uma integral ao invés de uma somatória, como em (12):

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x)\phi(x)dx. \tag{15}$$

3 Propriedades da "função" delta

3.1 Filtragem

Seja $f(x)$ uma função "bem-comportada", ou seja, satisfaz à definição clássica de função. Então vale a propriedade de filtragem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a).} \tag{16}$$

Como $\delta(x-a) = 0$ se $x \neq a$, a integral só pode assumir valores não-nulos para $x = a$. Nesse caso o integrando, calculado em $x = a$, resulta $f(a)$, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx}_{=1} = f(a).$$

A propriedade de filtragem vale também para sub-intervalos finitos da reta real. Se $c \leq a \leq b$ então

$$\int_{c}^{b} \delta(x-a)f(x)dx = f(a), \tag{17}$$

No entanto, se $a > b$ ou $a < c$, a função delta anula-se em todos os pontos do intervalo $[c, b]$, donde

$$\int_{c}^{b} \delta(x-a)f(x)dx = 0. \tag{18}$$

Escolhendo $f(x) = x$ e $a = 0$, (16) fornece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)xdx = f(0) = 0,$$

tal que, para todo $x \in (-\infty, +\infty)$ temos a propriedade

$$\boxed{x\delta(x) = 0.} \tag{19}$$

Analogamente mostra-se que

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{20}$$

A propriedade de filtragem é válida mesmo que $f(x)$ não seja uma função bem-comportada, como a própria função delta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\delta(y-a)dy = \delta(x-a). \tag{21}$$

onde $x \neq a$ pois, por motivos que serão esclarecidos no tratamento matemático rigoroso que será dado no próximo capítulo, não é bem-definido o produto de duas funções delta no mesmo ponto.

3.2 Paridade

$$\boxed{\delta(x) = \delta(-x).} \tag{22}$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$ verificaremos as propriedades (1) e (2) da função delta:

$$\delta(-x) = \delta(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \neq 0, \text{ ou } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } y = 0, \text{ ou } x = 0. \end{cases}$$

Como $dx = -dy$, e permutando os limites da integração,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(-y)(-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)dx,$$

onde trocamos y por x visto que são variáveis "mudas". Passando para o primeiro membro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{[\delta(x) - \delta(-x)]}_{=0} dx = 0,$$

donde resulta (22).

3.3 Escala

Seja $a \neq 0$ um fator de escala, então

$$\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).} \tag{23}$$

Vamos supor, inicialmente, que $a > 0$, e fazer a mudança de variável $y = ax$. Então, partindo da condição de normalização (2) com $x \to y$, temos

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)dy = a\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx,$$

donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx = \frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}.$$

Caso $a < 0$, então $|a| = -a$, e obtemos a mesma conclusão. Em ambos os casos, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\delta(ax) - \frac{1}{|a|}\delta(x)\right]}_{=0} dx = 0,$$

donde resulta (23). Uma interessante consequência da propriedade de escala é que, caso ax seja o resultado de uma medida física de posição, podemos considerar x um número "puro" e a a respectiva unidade (como metro, nanômetro, ano-luz, etc.). Então a função delta $\delta(ax)$ tem dimensões de inverso de comprimento, ou seja, a sua unidade é 1/metro, 1/ nanômetro, 1/ ano-luz, etc.

3.4 Quando o argumento é uma função

Seja $y(x)$ uma função de x que possua zeros símples nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, tal que $y(x_i) = 0$ e $y'(x_i) \neq 0$. Então

$$\boxed{\delta[y(x)] = \sum_i \frac{1}{|y'(x_i)|}\delta(x - x_i)}. \tag{24}$$

Para mostrar essa importante propriedade, vamos multplicar o primeiro membro da igualdade acima por uma função "bem-comportada" $f(x)$ e integrar em $(-\infty, +\infty)$. Vamos recordar que a função delta só é não-nula quando seu argumento é zero, ou seja, as contribuições para essa integral só virão das vizinhanças dos pontos onde o argumento $y(x)$ se anula, ou seja, justamente os zeros x_i de $y(x)$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \sum_i \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} f(x)\delta[y(x)]dx,$$

onde consideramos a contribuição de todas as vizinhanças dos zeros de $y(x)$.

Fazemos, agora, a mudança de variável $z = y(x)$, onde $x = y^{-1}(z)$. Logo $dz = dy(x) = |y'(x)|dx$. Os limites das integrais acima também mudam, pois

$$x = x_i \pm \epsilon \Rightarrow z = y(x_i \pm \epsilon),$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \sum_i \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} f[y^{-1}(z)]\delta(z)\frac{dz}{|y'(x)|}.$$

Pela propriedade de filtragem, cada integral no segundo membro da igualdade acima é igual ao respectivo integrando, calculado no ponto $z = 0$, ou seja, justamente onde $x = x_i = y^{-1}(0)$. Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \sum_i f[y^{-1}(0)]\frac{1}{|y'(x_i)|} = \sum_i f(x_i)\frac{1}{|y'(x_i)|}.$$

Finalmente, usando novamente a propridade de filtragem, mas no sentido inverso, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \frac{1}{|y'(x_i)|}\delta(x - x_i)f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \left\{ \delta[y(x)] - \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|} \right\} = 0,$$

tal que, para $f(x)$ arbitrário, resulta a propriedade (24).

Como um exemplo de aplicação, considere a função $y(x) = x^2 - a^2$, que tem zeros símples nos pontos $x = \pm a$, já que $y'(x_i) = \pm 2a \neq 0$. Então, de (24) temos que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a)}{|y'(a)|} + \frac{\delta(x + a)}{|y'(-a)|} = \frac{1}{2a}\left[\delta(x - a) + \delta(x + a)\right]. \qquad (25)$$

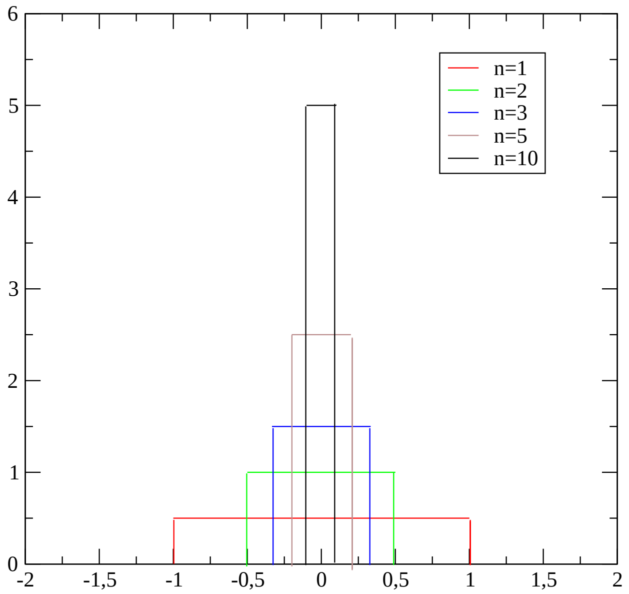

Figura 2: Representação do tipo pulso quadrado para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

4 Representações da "função" delta

É comum representarmos a "função" delta como o limite de uma sequência infinita de funções bem-comportadas a um parâmetro $\{\delta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, quando o parâmetro tende a infinito: $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$. A rigor, no entanto, esse limite não existe por vários motivos (é infinito, não é unico, etc.); e só é bem-definido quando o entendemos dentro de uma integral envolvendo funções normais $f(x)$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx.} \tag{26}$$

Há infinitas representações possíveis para a função delta. As mais usadas na prática são as seguintes:

- **Pulso quadrado** [Fig. 2]

$$\boxed{\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{se } -1/n \leq x \leq +1/n, \\ 0, & \text{se } x < -1/n, \text{ ou } x > 1/n. \end{cases}} \tag{27}$$

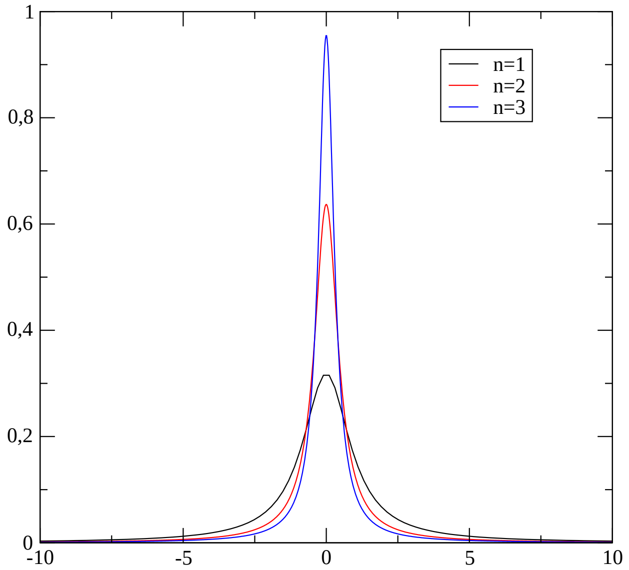

Figura 3: Representação do tipo Lorentziana para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

Para mostrar que a função acima é uma representação para a função delta, vamos verificar a definição (1)-(2). De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Além disso, resulta que, para todo n, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = \int_{-1/n}^{+1/n} \frac{n}{2} dx = \frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}\right) = 1.$$

- **Lorentziana** [Fig. 3]

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}} \tag{28}$$

Para verificar (1) há dois limites a serem calculados:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2nx^2} = 0, \qquad \text{se } x \neq 0,$$

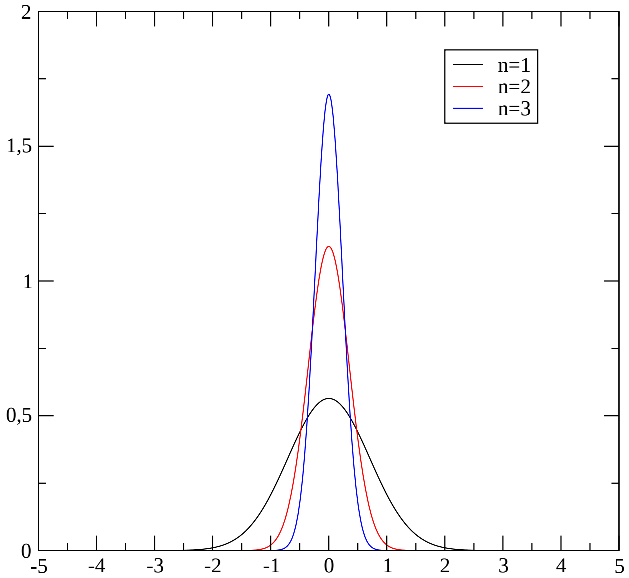

Figura 4: Representação do tipo Gaussiana para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

onde usamos a regra de L'Hospital para levantar a indeterminação. Para $x = 0$ temos, de (28), que $\delta_n(0) = n/\pi$, tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n(0) = \infty$. A condição de normalização (2) decorre de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+n^2x^2} = \frac{n}{\pi}\frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+y^2}}_{=\pi} = \frac{n}{\pi}\frac{\pi}{n} = 1,$$

onde fizemos $y = nx$. A integral definida acima pode ser encontrada usando resíduos.

- **Gaussiana** [Fig. 4]

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2},} \tag{29}$$

- **Seno cardinal.** É comum encontrarmos em aplicações físicas a função "seno cardinal", definida como

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{30}$$

Pelo limite trigonométrico fundamental, temos que $\mathrm{sinc}(0) = 1$, ou seja, $x = 0$ é uma singularidade removível da função, não um pólo. Além

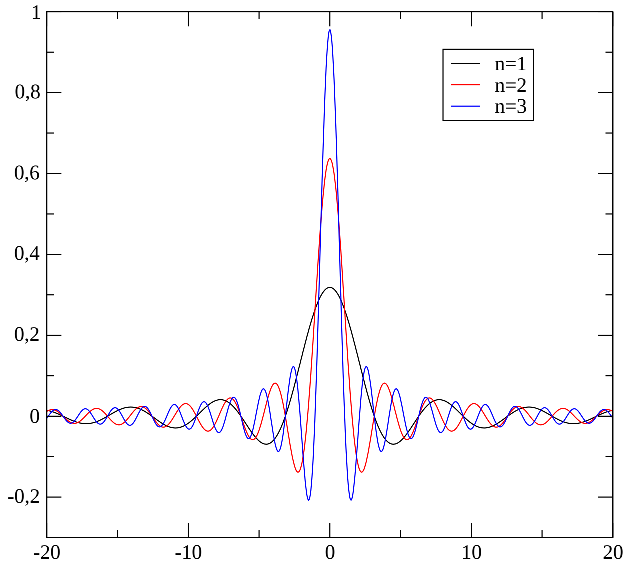

Figura 5: Representação do tipo seno cardinal para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

disso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} x dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \tag{31}$$

como pode ser calculado usando resíduos (integral de Dirichlet). Do seno cardinal derivam duas representações úteis para a função delta. A primeira é [Fig. 5]

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}(nx)}. \tag{32}$$

Para $x = 0$ temos que $\delta_n(0) = n/\pi$, donde $\lim_{n\to\infty} \delta_n(0) = \infty$. A condição de normalização fica, em vista de (31):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(nx) dx = \frac{n}{\pi} \frac{1}{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} y dy}_{=\pi} = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\pi}{n}\right) = 1.$$

- **Pico de difração**. Consiste no quadrado da função sinc, e recebe este nome por assemelhar-se ao padrão de difração de uma fenda única em ótica [Fig. 6]:

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}^2 nx.} \tag{33}$$

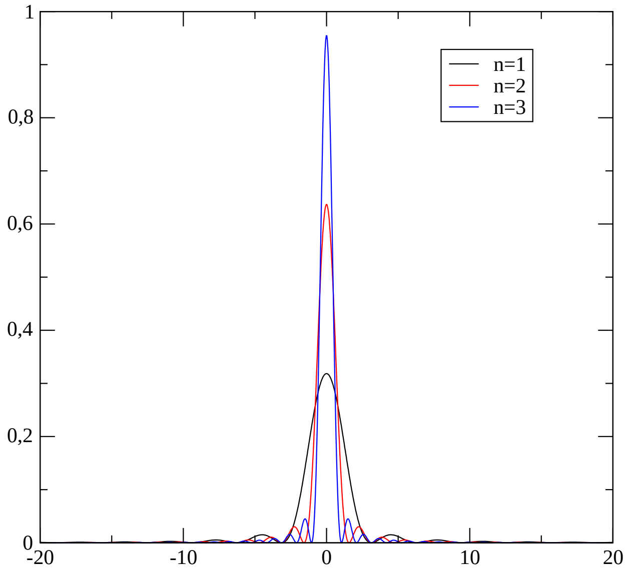

Figura 6: Representação do tipo pico de difração para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

Há, ainda, outras representações, raramente usadas, como

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2n}|x|^{-1+(1/n)}, \tag{34}$$

assim como, também, representações assimétricas em relação a $x = 0$:

$$\delta_n(x) = n\mathrm{Ai}(nx), \tag{35}$$
$$\delta_n(x) = nJ_n[n(x+1)], \tag{36}$$

onde $\mathrm{Ai}(x)$ e $J_n(x)$ são, respectivamente, as funções de Airy e de Bessel de ordem n.

Observe que nem todas as representações possíveis para a função delta são igualmente boas, quando as interpretamos no sentido da Eq. (26). Por exemplo, considere a função "normal" $f(x) = e^{-x}$. Se usarmos, para ela, a representação lorentziana (28), teremos problemas, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{1 + n^2 x^2} = \infty,$$

a mesma coisa ocorrendo para o "pico de difração" (33), pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin^2 nx dx}{nx^2} = \infty.$$

Já a representação gaussiana (29) pode ser utilizada, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} e^{-n^2x^2} dx = e^{1/4n^2},$$

como pode ser verificado completando o quadrado no integrando e usando a integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}, \tag{37}$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \lim_{n\to\infty} e^{1/4n^2} = 1.$$

5 Representação integral

Usando

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \tag{38}$$

na representação do seno cardinal (32) temos, usando o teorema fundamental do cálculo integral, que

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi x} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ix} e^y|_{-inx}^{+inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ix} \int_{-inx}^{+inx} e^y dy.$$

Fazendo a transformação de variável $y = ikx$ temos que

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ix} ix \int_{-n}^{+n} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{ikx} dk,$$

que, no limite de n tendendo ao infinito, nos dá uma representação integral para a função delta

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk,} \tag{39}$$

onde a integral deve ser tomada como valor principal de Cauchy, devido à singularidade existente em $x = 0$.

A representação integral (39) só pode ser usada com funções bem-comportadas $f(x)$ que sejam contínuas por partes em $(-\infty, +\infty)$, ou seja, $f(x)$ pode ter um número finito ou infinito enumerável de pontos de descontinuidade $x_1, x_2, \ldots x_i$. Em cada um desses pontos de descontinuidade o valor da função $f(x)$ deve ser substituido pela média dos seus valores à direita e à esquerda da descontinuidade:

$$\frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}.$$

Logo, $f(x)$ deve ser somável da mesma forma que exigimos para um desenvolvimento em série de Fourier. Em outras palavras, se $f(x)$ admite uma expansão em série de Fourier, então pode ser usada a representação integral (39).

5.1 Relação com a função degrau

A função degrau unitário de Heaviside é definida como

$$H(x-x') = \begin{cases} 1, & \text{se } x > x', \\ 1/2, & \text{se } x = x', \\ 0, & \text{se } x < x'. \end{cases} \tag{40}$$

onde o valor médio em $x = x'$ foi introduzido em conformidade com a condição de somabilidade que acabamos de comentar. Embora, a rigor, a função degrau não seja diferenciável em $x = x'$ (devido à descontinuidade), é possível identificarmos a função delta de Dirac como a derivada da função degrau, num sentido que só será tornado rigoroso quando abordarmos a teoria das distribuições no próximo capítulo:

$$\boxed{\delta(x-x') = \frac{d}{dx}H(x-x').} \tag{41}$$

Para verificar a plausibilidade dessa relação, vamos multiplicar a derivada da função degrau por uma função bem-comportada $f(x)$ e integrar em $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}H(x-x')dx' = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')H(x-x')dx'.$$

Como $H(x-x')$ só não é nula quando $x > x'$, podemos escrever $H(x-x') = 1$ para $-\infty < x' < x$, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}H(x-x')dx' = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x')dx' = f(x),$$

usando o teorema fundamental do cálculo diferencial. Pela propriedade de filtragem (16)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}H(x-x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx'$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\underbrace{\left\{\frac{d}{dx}H(x-x') - \delta(x-x')\right\}}_{=0} dx' = 0,$$

que conduz, para uma função $f(x)$ arbitrária, a (41).

6 Funções delta multidimensionais

6.1 Duas dimensões

Definimos a função delta bidimensional como o produto de duas funções delta unidimensionais, ao longo das direções independentes x e y

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y'), \tag{42}$$

com a seguinte normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1. \tag{43}$$

A dimensão da função delta bidimensional é o inverso de uma área. Seja $f(x,y)$ uma função normal de duas variáveis. A propriedade de filtragem é escrita como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x,y)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = f(x',y'). \tag{44}$$

Usando coordenadas polares planas (ρ,φ), tal que $x=\rho\cos\varphi$ e $y=\rho\sin\varphi$, a condição de normalização (43) torna-se

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1, \tag{45}$$

que é satisfeita caso

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi').} \tag{46}$$

6.2 Três dimensões

A função delta tridimensional é o produto de três funções delta unidimensionais (com dimensão de inverso de volume):

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \tag{47}$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1. \tag{48}$$

Usando coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z) a Eq. (48) fica

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1, \tag{49}$$

que leva à expressão

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z').} \tag{50}$$

Analogamente, para coordenadas esféricas polares (r,θ,ϕ) a Eq. (48) será satisfeita se

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi'),} \tag{51}$$

uma vez que o elemento de volume é $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$.

Como um exemplo de aplicação no eletromagnetismo, vamos escrever na forma de uma densidade de carga elétrica um anel de raio R com centro na origem e no plano $z=0$, uniformemente carregado com uma carga total Q. A densidade de carga é, em coordenadas cilíndricas

$$\mu(\rho,\varphi,z) = \frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho-R)\delta(z),$$

já que, integrando em todo o espaço

$$\int d^3r\mu(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\underbrace{\int_0^\infty \rho d\rho\delta(\rho-R)}_{=R}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(z)dz}_{=1} = Q.$$

Observe que, devido à simetria axial do sistema, a densidade de carga não pode depender do ângulo azimutal φ.

Se resolvermos usar coordenadas esféricas, lembrando que o plano do anel é caracterizado por $\theta=\pi/2$, cujo cosseno é nulo, temos

$$\mu(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r-R)\delta(\cos\theta),$$

cuja integral é

$$\int d^3r\mu(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R^2}\underbrace{\int_0^\infty r^2 dr\delta(r-R)}_{=R^2}\underbrace{\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\delta(\cos\theta)}_{=1}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} = Q.$$

7 Derivadas da "função" delta

Embora $\delta(x)$ não seja uma função, no sentido estrito da palavra, é possível dar a ela uma interpretação rigorosa (na teoria das distribuições, como será visto no próximo capítulo) tal que seja possível obter a sua derivada $\delta'(x)$, e usar os recursos do cálculo usual para trabalhar com ela. Para isso, sempre imaginamos que a função delta, bem como sua derivada, estejam multiplicadas por uma função "normal" $f(x)$ e integradas de $-\infty$ a $+\infty$. Por exemplo, temos a seguinte propriedade fundamental da derivada da função delta:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-a)f(x)dx = -f'(a),} \tag{52}$$

que pode ser "demonstrada" como segue: integrando por partes o lado esquerdo da expressão acima temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = f(x)\underbrace{\delta(x-a)}_{=0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x-a)dx = -f'(a).$$

No eletromagnetismo é possível associar a derivada da função delta com a distribuição singular de carga correspondente a um dipólo elétrico que, por definição, é um sistema formado por duas cargas puntiformes $-q$ e $+q$, separadas por uma distância $2a$, ou seja, são fixadas nos pontos $x = -a$ e $x = +a$, respectivamente. A densidade de carga em uma dimensão será, pois,

$$\mu(x) = q\delta(x-a) - q\delta(x-(-a)) = q[\delta(x-a) - \delta(x+a)].$$

Fazendo a tender a zero, temos

$$\lim_{a\to 0} \frac{\delta(x-a) - \delta(x+a)}{2a} = \frac{d}{dx}\delta(0),$$

tal que, lembrando que $p \equiv q(2a)$ é o momento de dipólo elétrico, a densidade de carga do dipólo é

$$\mu(x) = p\delta'(0).$$

Várias propriedades importantes decorrem da definição (52), como

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \tag{53}$$

Para mostrá-la multiplicamos o primeiro membro por uma função "normal" $f(x)$ e integramos de $-\infty$ a $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(-x)f(x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} \delta'(y)f(-y)(-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(y)f(-y)dy$$

$$f(-y)\underbrace{\delta(y)}_{=0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(-y)\delta(y)dx = f'(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)dx,$$

onde fizemos a mudança de variável $y = -x$, integramos por partes, e usamos (52). Passando tudo para o primeiro membro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{[\delta'(-x) + \delta'(x)]}_{=0} f(x)dx = 0,$$

se $f(x)$ for uma função arbitrária, diferente de zero portanto, o que leva a (53).

Derivando (39) chegamos à representação integral

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{ikx}dk. \tag{54}$$

De forma análoga a (53), nova integração por partes conduz à derivada segunda da função delta

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta''(x-a)f(x)dx = f''(a),} \tag{55}$$

que pode ser generalizanda para a derivada de ordem m:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x-a)f(x)dx = (-1)^m f^{(m)}(a).} \tag{56}$$

7.1 Derivadas parciais

Não há maiores dificuldades para generalizar o tratamento dado às derivadas da função delta para mais de uma dimensão espacial. Seja x_i uma coordenada genérica no espaço Euclidiano e $f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$ uma função bem-comportada da posição nesse espaço. Então a derivada parcial da função delta tridimensional em relação a ela será tal que, integrando em todo o espaço

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathbf{r}) = -\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}, \tag{57}$$

ou, sendo $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ um vetor de componentes constantes,

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = -\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{a}}, \tag{58}$$

Este procedimento nos permite definir o gradiente da função delta, $\nabla \equiv \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \partial/\partial x_i$, como

$$\boxed{\int d^3r f(\mathbf{r}) \nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = -\nabla f(\mathbf{a}),} \tag{59}$$

que, no eletromagnetismo, pode ser empregado para exprimir a densidade de carga singular correspondente a um dipólo elétrico de momento $\mathbf{p}$ e posicionado em $\mathbf{r} = \mathbf{a}$:

$$\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}).$$

8 Exercícios

1. Mostre que as propriedades de paridade (22) e escala (23) decorrem como casos particulares da propriedade geral (24).

2. Calcule as integrais:

   (a)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x^2 + x - 2)(3x^2 - 5x + 1)$$

   (b)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x^2 + 4x - 21)(7x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$$

3. Mostre que as funções gaussiana (29) e pico de difração (33) são representação possíveis para a função delta.

4. Considere uma linha uniformemente carregada com uma carga total Q ao longo do eixo z e cujo ponto médio encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Se o comprimento total da linha é $2b$, mostre que a densidade volumétrica de carga associada é, em coordenadas esféricas, dada por

   $$\mu(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi r}\delta(r - b)\left[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)\right]$$

5. Mostre as seguintes propriedades das derivadas da "função" delta:

   (a)
   $$x\delta'(x) = -\delta(x),$$

   (b)
   $$x^2\delta'(x) = 0,$$

   (c)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - y)\delta(y - a)dy = \delta'(x - a),$$

   (d)
   $$\delta''(-x) = \delta''(x),$$

   (e)
   $$x^2\delta''(x) = 2\delta(x).$$

(f)
$$\delta^{(m)}(x) = (-1)^m \delta^{(m)}(-x),$$

(g)
$$x^{m+1}\delta^{(m)}(x) = 0,$$

(h)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x-y)\delta^{(n)}(y-a)dy = \delta^{(m+n)}(x-a).$$

6. Considere a seguinte representação, do tipo pulso-quadrado, para a função delta
$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1/(2a), & \text{se } -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{se } x < a, \text{ ou } x > a. \end{cases}$$
Considere um conjunto de infinitas cópias desta função, com período $2L$, e desenvolva esta função em série de Fourier, tal que, fazendo $a \to 0$, obtenha a seguinte representação em série para a função delta:
$$\delta(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Referências

[1] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1947)

[2] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Vols. 1-2 (Hermann, Paris, 1950-1951).

[3] I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, *Generalized functions*, Vols. 1-5 (Academic Press, New York, 1966-1968).

[4] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978).

[5] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 5a. Ed. (Harcourt, San Diego, 2001).