

Matemática: sua natureza e seu ensino

Lúcio Fassarella

Universidade Federal do Espírito Santo

lucio.fassarella@ufes.br

21 de abril de 2015



Sumário

- 1 A Natureza da Matemática
 - Sobre como resolver problemas matemáticos
- 2 Ensino-aprendizagem da Matemática
 - Fundamentos
 - Conceituação didática de problema
 - Metodologia da Resolução de Problemas
 - Metodologia da Investigação Matemática
- 3 Referências



Matemática: arte de revelar padrões e resolver problemas



Matemática: arte de revelar padrões e resolver problemas

Essencialmente,

A Matemática é a arte de revelar padrões e resolver problemas que envolvem as idéias de número e forma.



Matemática: arte de revelar padrões e resolver problemas

Essencialmente,

A Matemática é a arte de revelar padrões e resolver problemas que envolvem as idéias de número e forma.

Matemática é *arte* no sentido de *estética* e no sentido de *técnica*.



A estética Matemática

A estética da Matemática está nas explicações, nos argumentos que constituem as resoluções dos problemas.



A estética Matemática

A estética da Matemática está nas explicações, nos argumentos que constituem as resoluções dos problemas.

“A primeira coisa que deve ser entendida é que a Matemática é uma arte. A diferença entre ela e as outras artes, tais como a música e a pintura, é que nossa cultura não a reconhece como tal... A arte não está na verdade, mas nas explicações, no argumento. É o argumento em si que dá a verdade seu contexto, e determina o que realmente está sendo dito e o que significa. Matemática é a arte da explicação...[Porém,] quando nos concentramos no que, e deixamos o porque, a Matemática é reduzida a uma casca vazia.”

[Lockhart (2009), p.29].



A estética Matemática

O caráter estético da Matemática é essencial nas discussões sobre o ensino dessa disciplina, especialmente se consideramos uma concepção de educação na qual todo ensinamento deve partir da *experiência da beleza*, como defende Rubem Alves:

“Se fosse ensinar a uma criança a beleza da música não começaria com partituras, notas e pautas. Ouviríamos juntos as melodias mais gostosas e lhe contaria sobre os instrumentos que fazem a música. Aí, encantada com a beleza da música, ela mesma me pediria que lhe ensinasse o mistério daquelas bolinhas pretas escritas sobre cinco linhas. Porque as bolinhas pretas e as cinco linhas são apenas ferramentas para a produção da beleza musical. A experiência da beleza tem de vir antes.”

Rubem Alves.



A técnica Matemática

A técnica matemática constitui um conjunto de atitudes, ideias e métodos necessários para descobrir, formular e resolver problemas matemáticos.



A técnica Matemática

A técnica matemática constitui um conjunto de atitudes, ideias e métodos necessários para descobrir, formular e resolver problemas matemáticos.

As atitudes dizem respeito à postura em relação aos problemas matemáticos, cuja resolução requer engajamento e racionalidade.



A técnica Matemática

A técnica matemática constitui um conjunto de atitudes, ideias e métodos necessários para descobrir, formular e resolver problemas matemáticos.

As atitudes dizem respeito à postura em relação aos problemas matemáticos, cuja resolução requer engajamento e racionalidade.

As ideias matemáticas são noções intuitivas fundamentais, tais como *conjunto*, *número*, *relação*, *transformação* e *algoritmo*.



A técnica Matemática

Os métodos matemáticos constituem as seguintes modalidades de pensamento:

- indução
- analogia
- dedução
- integração
- abstração
- simplificação
- generalização
- especialização
- representação simbólica
- pensamento integrativo
- pensamento desenvolvimentista

[Isoda-Katagiri (2012)]



A técnica Matemática

Todas as atitudes, ideias e modalidades de pensamento matemático são usadas e também desenvolvidas pela aplicação na resolução dos problemas matemáticos, mas considerações teóricas sobre isso são desnecessárias para quem somente deseja aprender ou usar/fazer a Matemática (ao invés de ensinar ou compreender sua epistemologia).



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Não existe uma metodologia que nos permita resolver sistematicamente todos os problemas matemáticos: *a resolução de problemas é uma arte que pode e deve ser desenvolvida pela prática.*

Contudo, podemos sistematizar a resolução de problemas em termos de diretrizes gerais que sirvam de orientação quanto ao que fazer.



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Não existe uma metodologia que nos permita resolver sistematicamente todos os problemas matemáticos: *a resolução de problemas é uma arte que pode e deve ser desenvolvida pela prática.*

Contudo, podemos sistematizar a resolução de problemas em termos de diretrizes gerais que sirvam de orientação quanto ao que fazer.

Seguindo Polya [**Polya (1995)**] (e outros que vieram antes e depois dele), podemos dizer que resolução de um problema matemático segue as seguintes etapas:

- Interpretação
- Concepção de uma estratégia
- Execução da estratégia
- Verificação/validação



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico
- Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico
- Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho
- Buscar a solução pela adaptação de uma proposta razoável



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico
- Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho
- Buscar a solução pela adaptação de uma proposta razoável
- Buscar a solução por *tentativa e erro*



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico
- Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho
- Buscar a solução pela adaptação de uma proposta razoável
- Buscar a solução por *tentativa e erro*
- Fazer *engenharia reversa*



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico
- Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho
- Buscar a solução pela adaptação de uma proposta razoável
- Buscar a solução por *tentativa e erro*
- Fazer *engenharia reversa*
- Se o problema for demasiadamente complexo, tentar resolvê-lo progressivamente



Diretrizes para resolver problemas matemáticos

Geralmente, a concepção de uma estratégia é a etapa mais difícil da resolução de um problema matemático.

Para tanto, elencamos as seguintes iniciativas preliminares:

- Lembrar da resolução de algum problema semelhante
- Representar o problema esquematicamente
- Interpretar o problema geometricamente
- Se o problema for genérico, tentar resolver casos específicos
- Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico
- Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho
- Buscar a solução pela adaptação de uma proposta razoável
- Buscar a solução por *tentativa e erro*
- Fazer *engenharia reversa*
- Se o problema for demasiadamente complexo, tentar resolvê-lo progressivamente
- Etc.



Ensino da Matemática e Resolução de Problemas

Considerando que a natureza da Matemática é a *arte de resolver problemas*, devemos focalizar o ensino da Matemática na própria resolução de problemas, observando sua estética e sua técnica.



Ensino da Matemática e Resolução de Problemas

Considerando que a natureza da Matemática é a *arte de resolver problemas*, devemos focalizar o ensino da Matemática na própria resolução de problemas, observando sua estética e sua técnica.

Paul Halmos:

“Eu acredito que os problemas são o coração da Matemática e espero que nós professores, nas aulas e seminários e nos livros e artigos que escrevermos, enfatizemos isso cada vez mais, e que treinemos nossos estudantes a serem melhores elaboradores e solucionadores de problemas do que nós mesmos somos.”

[Halmos (1980)]



Ensino da Matemática e Resolução de Problemas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também enfatizam a centralidade da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática:

“A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.”

[Brasil (1997), p.33]



O que precisamos ser/saber para ensinar Matemática?

Elencamos três elementos essenciais necessários para o professor de Matemática conduzir satisfatoriamente o processo de ensino-aprendizagem:



O que precisamos ser/saber para ensinar Matemática?

Elencamos três elementos essenciais necessários para o professor de Matemática conduzir satisfatoriamente o processo de ensino-aprendizagem:

- **virtudes de caráter**, o que inclui uma postura respeitosa e ética para com os alunos;



O que precisamos ser/saber para ensinar Matemática?

Elencamos três elementos essenciais necessários para o professor de Matemática conduzir satisfatoriamente o processo de ensino-aprendizagem:

- **virtudes de caráter**, o que inclui uma postura respeitosa e ética para com os alunos;
- **conhecimento aprofundado da Matemática** que deve ensinar (incluindo sua estética e sua técnica);



O que precisamos ser/saber para ensinar Matemática?

Elencamos três elementos essenciais necessários para o professor de Matemática conduzir satisfatoriamente o processo de ensino-aprendizagem:

- **virtudes de caráter**, o que inclui uma postura respeitosa e ética para com os alunos;
- **conhecimento aprofundado da Matemática** que deve ensinar (incluindo sua estética e sua técnica);
- **domínio de metodologias didáticas eficientes**, incluindo práticas pedagógicas adequadas para lidar com limitações e dificuldades dos estudantes, que estimulem o desejo de conhecer, maximizem o prazer de estudar, minimizem frustrações e contornem fracassos.



O que precisamos ser/saber para ensinar Matemática?

“A maioria das pessoas interessa-se, em alguns momentos, pelo jogo da aprendizagem, se lhes oferecem situações abertas, estimulantes, interessantes. (...) Infelizmente, nem sempre isso bastará, mesmo quando o professor faz tudo o que pode para mobilizar o maior número de alunos. Salvo para alguns, aprender exige tempo, esforços, emoções dolorosas: agústia do fracasso, frustração por não conseguir aprender, sentimento de chegar aos limites, medo do julgamento de terceiros. Para consentir em tal investimento e, portanto, tomar a decisão de aprender e conservá-la, é preciso uma boa razão. O prazer de aprender é uma delas, o desejo de saber é outra.”

[Perrenoud (2000), pp.69-70].



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

Fator fundamental para que o ensino-aprendizagem da Matemática seja satisfatório é o desenvolvimento de uma abordagem equilibrada de quatro dimensões:

- *Dimensão conceitual*
- *Dimensão contextual*
- *Dimensão procedimental*
- *Dimensão atitudinal*



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

Dimensão conceitual

Diz respeito às noções intuitivas e à formalização dos conceitos, tendo como referência o saber institucionalizado e como paradigma o método axiomático-dedutivo.



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

Dimensão contextual

Refere-se a relação da Matemática com outros saberes, situações cotidianas ou temas científicos e tecnológicos.

Em particular, significa a proposição ou a resolução de problemas matemáticos contextualizados - dentre os quais estão as aplicações.



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

Dimensão procedimental

Diz respeito à manipulação numérica e algébrica, aos métodos de cálculo e a qualquer procedimento algorítmico.



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

Dimensão atitudinal

Refere-se principalmente às disposições mentais relacionadas à investigação e à resolução de problemas matemáticos, tais como iniciativa, autonomia e senso crítico.



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

O ensino desequilibrado dessas quatro dimensões torna o aprendizado da Matemática algo míope: incapaz de elaborar uma perspectiva adequada sobre sua natureza e utilidade.



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

O ensino desequilibrado dessas quatro dimensões torna o aprendizado da Matemática algo míope: incapaz de elaborar uma perspectiva adequada sobre sua natureza e utilidade.

Em particular, a ênfase demasiada na dimensão procedimental (situação mais comum) tende a tornar o estudo da Matemática tedioso e desinteressante – o que contribui para o desenvolvimento da rejeição que a disciplina sofre dos escolares (e também dos egressos da escola).



Dimensões do ensino-aprendizagem da Matemática

Segundo Elon Lages Lima,

“A dosagem adequada dessas três componentes é o fator de equilíbrio do processo de aprendizagem.” “Cada tópico apresentado na sala de aula, cada novo assunto tratado no curso, cada tema estudado deve ser visto sob esses três aspectos, o conceitual, o manipulativo e o aplicativo. O professor deve submeter-se ao desafio de compor esse trio a cada nova etapa do seu trabalho.”

[Lima (2003), p.177].



Problema

O conceito de *problema* possui diversas definições no âmbito da Educação Matemática, mas todas convergem para a seguinte:



Problema

O conceito de *problema* possui diversas definições no âmbito da Educação Matemática, mas todas convergem para a seguinte:

Problema

Problema é uma questão cuja solução é desconhecida e cuja resolução deve ser elaborada criativamente.



Problema

O conceito de *problema* possui diversas definições no âmbito da Educação Matemática, mas todas convergem para a seguinte:

Problema

Problema é uma questão cuja solução é desconhecida e cuja resolução deve ser elaborada criativamente.

Alguns autores consideram um componente subjetivo na definição de problema: *o engajamento da pessoa em obter uma solução.*

“A situação-problema refere-se à configuração do problema, é estática (por exemplo, o examinador cria uma situação-problema como questão de uma prova). Uma situação-problema só se transforma realmente em um problema quando o indivíduo que se depara com ela é motivado (ou induzido) a transformá-la.”



Problema X Exercício

Na Educação Matemática, problemas e exercícios têm acepções diferentes, especialmente porque é relativa e dependente do nível de conhecimento de quem tem a tarefa de resolver: o que é problema para uma pessoa, pode ser exercício para outra.



Problema X Exercício

Na Educação Matemática, problemas e exercícios têm acepções diferentes, especialmente porque é relativa e dependente do nível de conhecimento de quem tem a tarefa de resolver: o que é problema para uma pessoa, pode ser exercício para outra.

Característico do exercício é o conhecimento de um modo preestabelecido de resolvê-lo, podendo ser um algoritmo ou uma técnica padronizada que bastam ser executados.



Problema X Exercício

Na Educação Matemática, problemas e exercícios têm acepções diferentes, especialmente porque é relativa e dependente do nível de conhecimento de quem tem a tarefa de resolver: o que é problema para uma pessoa, pode ser exercício para outra.

Característico do exercício é o conhecimento de um modo preestabelecido de resolvê-lo, podendo ser um algoritmo ou uma técnica padronizada que bastam ser executados.

Característico do problema (matemático) é o desconhecimento de um método de resolução preestabelecido: sua resolução requer a elaboração e execução de uma estratégia, o que depende de iniciativa, criativa e conhecimento.



Resolução de problemas X Paradigma do exercício

Skovsmose denominou *paradigma do exercício* um modo (tradicional) de ensinar Matemática que tem como principal característica a ênfase demasiada nos exercícios:



Resolução de problemas X Paradigma do exercício

Skovsmose denominou *paradigma do exercício* um modo (tradicional) de ensinar Matemática que tem como principal característica a ênfase demasiada nos exercícios:

“[A] aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios seleccionados. (...) Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correcta.”

[Skovsmose (2000)]



Conceituação da RP

A metodologia da Resolução de Problemas fundamenta o ensino da Matemática na resolução de problemas, podendo considerá-los tanto como princípio, meio e fim do processo de ensino-aprendizagem:



Conceituação da RP

A metodologia da Resolução de Problemas fundamenta o ensino da Matemática na resolução de problemas, podendo considerá-los tanto como princípio, meio e fim do processo de ensino-aprendizagem:

“Resolução de Problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, conseqüentemente, o que significa aprender.[Em síntese, esta metodologia] baseia-se na proposição e no enfrentamento do que chamaremos de situação-problema.”

[Diniz (2001), p.89]



Atividade/sequência didática segundo a RP

Uma atividade ou sequência didática baseada na Resolução de Problemas pode ser desenvolvida nas seguintes etapas:



Atividade/sequência didática segundo a RP

Uma atividade ou sequência didática baseada na Resolução de Problemas pode ser desenvolvida nas seguintes etapas:

- proposição do problema
- interpretação e resolução do problema
- comunicação e discussão dos resultados
- formalização conceitual



Atividade/sequência didática segundo a Investigação Matemática

A metodologia de Investigação Matemática é caracterizada pela proposição de situações abertas em que os estudantes são instigados a explorar a situação, descobrir padrões e formular problemas antes de tentar resolvê-los.



Atividade/sequência didática segundo a Investigação Matemática

A metodologia de Investigação Matemática é caracterizada pela proposição de situações abertas em que os estudantes são instigados a explorar a situação, descobrir padrões e formular problemas antes de tentar resolvê-los.

Uma sequência didática baseada na Investigação Matemática desenvolve-se habitualmente nas seguintes etapas:



Atividade/sequência didática segundo a Investigação Matemática

A metodologia de Investigação Matemática é caracterizada pela proposição de situações abertas em que os estudantes são instigados a explorar a situação, descobrir padrões e formular problemas antes de tentar resolvê-los.

Uma sequência didática baseada na Investigação Matemática desenvolve-se habitualmente nas seguintes etapas:

- *proposição da tarefa*, na qual o professor apresenta uma situação que suscita questionamentos nos estudantes
- *investigação*, na qual os estudantes elaboram e buscam solucionar suas questões
- *discussão*, em que os alunos comunicam suas iniciativas, desenvolvimentos e conclusões aos colegas
- *conceituação*, na qual o professor pode conduzir comparações e realiza uma síntese teórica.



O papel do professor na aula de Investigação Matemática

Na aula de investigação Matemática, o professor é responsável tanto pela introdução da tarefa quanto pelo seu desenvolvimento, durante o qual supervisiona, incentiva e orienta a ação dos alunos:



O papel do professor na aula de Investigação Matemática

Na aula de investigação Matemática, o professor é responsável tanto pela introdução da tarefa quanto pelo seu desenvolvimento, durante o qual supervisiona, incentiva e orienta a ação dos alunos:

“Existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo.”

[Ponte-Brocardo-Oliveira (2013), p.26]



Referências





BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de Primeira a Quarta Séries.

MEC/SEF: Brasília, 1997



Márcia R. F. Brito

Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos

In: Márcia R. F. de Brito: *Solução de problemas e a matemática escolar*.

Editora Alínea: São Paulo - SP, 2010: pp.15-53.



Maria I. Diniz

PResolução de Problemas e Comunicação

In: Kátia S. Smole, Maria I. Diniz: *Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades Básicas para Aprender Matemática*.

Editora Armed: Porto Alegre, 2001: pp.87-97.



Paul Halmos (1980)

The Heart of Mathematics

The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 7 (1980): pp. 519–524.





Masami Isoda, Shigeo Katagiri (2012)

Mathematical Thinking: How to Develop It in the Classroom

World Scientific: Singapura, 2012



Elon L. Lima (2003)

Matemática e Ensino

SBM: Rio de Janeiro, 2003.



Paul Lockhart (2009)

Mathematician's Lament

Bellevue Literary Press: New York, 2012



P. Perrenoud (2000)

Dez Novas Competências para Ensinar

Artmed: Porto Alegre, 2000





George Polya (1995)

A Arte de Resolver Problemas - 3a. edição

Interciência: Rio de Janeiro, 1995



João P. da Ponte, Joana Brocardo, Hélia Oliveira (2013)

Investigações Matemáticas na Sala de Aula - 3a. edição, revista e ampliada

Autêntica: São Paulo, 2013.



Ole Skovsmose (2000)

Cenários para investigação

BOLEMA – Boletim de Educação Matemática: n. 14, p.66-91, 2000.



OBRIGADO!

