UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - CCE - UFES
1ª LISTA DE EXERCÍCIOS - ÁLGEBRA LINEAR II

1) Sejam V um K-espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se $f(x) \in K[x]$ então $Ker(f(T))$ é T-invariante.

2) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear definido em um K-espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que $V = KerT \oplus \operatorname{Im} T$ se, e somente se, $KerT \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

3) Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador nilpotente e $n = \dim_K V$. Mostre que $T^n = 0$.

4) Sejam $T, S : V \longrightarrow V$ operadores lineares diagonalizáveis onde $\dim_K V < \infty$. Se $T \circ S = S \circ T$ então existe uma base B de V tal que as matrizes $[T]_B$ e $[S]_B$ são diagonais, ou seja, S e T são "simultaneamente" diagonalizáveis.

5) Sejam $T, S : V \longrightarrow V$ operadores lineares tais que $S \circ T = T \circ S$. Mostre que:

a) $S \circ p(T) = p(T) \circ S$, para qualquer $p(x) \in K[x]$;
b) Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_t \in K$ todos os autovalores distintos de T, $W_i = Aut_T(\lambda_i)$, $\forall i \in \{1, ..., t\}$. Mostre que se T é diagonalizável então W_i é S-invariante, para todo $i \in \{1, ..., t\}$.

6) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear diagonalizável com $\dim_K V < \infty$. Suponha que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} ... (x - \lambda_t)^{n_t}$ com $\lambda_1, ..., \lambda_t \in K$ distintos e seja $W = \{S \in L(V, V) \ / \ S \circ T = T \circ S\}$. Mostre que $\dim_K W = n_1^2 + ... + n_t^2$.

7) Sejam $T, S : V \longrightarrow V$ operadores lineares. Se $T \circ S = S \circ T$, mostre que $Ker\ S$ e $\operatorname{Im}\ S$ são $T-$invariantes.

8) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear com $\dim_K V < \infty$ e seja $m_T(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$. Mostre que T é um isomorfismo se, e somente se, $a_0 \neq 0$.

9) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear com $\dim_K V < \infty$. Mostre que:

a) Se T é nilpotente então 0 é o único autovalor de T;
b) Se K é um corpo algebricamente fechado então vale a recíproca do ítem (a).

10) Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial e $p(x) \in K[x]$. Mostre que se $\lambda \in K$ é um autovalor de T então $p(\lambda)$ é um autovalor de $p(T)$.

11) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear com $\dim_K V < \infty$. Se V é T-cíclico e $\mathcal{U} : V \longrightarrow V$ é um operador linear tal que $\mathcal{U} \circ T = T \circ \mathcal{U}$ então existe $p(x) \in K[x]$ tal que $\mathcal{U} = p(T)$.

12) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear com $\dim_K V < \infty$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe $\lambda \in K$ tal que $T = \lambda I$, onde I é um operador de identidade de V em V;
(b) T comuta com qualquer operador diagonalizável $\mathcal{U} : V \longrightarrow V$;
(c) Todo vetor $v \in V - \{0\}$ é um autovetor de T.

13) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear diagonalizável, com $\dim_K V < \infty$. Se W é um subespaço $T-$invariante de V então o operador linear $T' : \underset{w \longmapsto T(w)}{W \longrightarrow W}$ é diagonalizável.