DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - CCE - UFES

2ª AVALIAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR II - 2011/1 - Prof. Thiago

NOME:
VALOR: 10 pontos

Observações:
I) A prova é individual e sem consulta;
II) Todas as questões devem ser devidamente **JUSTIFICADAS;**
III) Faça **apenas** 5 das 7 questões;
IV) Cada questão tem o valor de 2,0 pontos.

1) Seja V um $K-$espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno, e seja $W \subset V$ um subespaço vetorial de V. Mostre que $V = W \oplus W^{\perp}$.

2) Sejam V e W espaços vetoriais sobre K com produto interno e seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

a) Mostre que se T preserva produto interno então T é injetiva. Vale a recíproca? (Prove em caso afirmativo, ou dê um contra-exemplo caso contrário)
b) Mostre que T preserva produto interno se, e somente se, T preserva norma, ou seja, $||T(v)|| = ||v||$, $\forall v \in V$.

3) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um $K-$espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Mostre que se T é um isomorfismo então T^* é um isomorfismo e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

4) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um $K-$espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Mostre que:

a) $Ker(T^*) = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$;
b) $Ker(T) = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$;
c) $\operatorname{Im} T = (Ker(T^*))^{\perp}$;
d) $\operatorname{Im} T^* = (Ker(T))^{\perp}$.

5) Seja $V = C([-1,1];\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Seja $F \subset V$ o subespaço formado pelas funções pares e $G \subset V$ o subespaço formado pelas funções ímpares. Considere V com o produto interno $\langle\ ,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$. Mostre que $G = F^{\perp}$.

6) Seja V um espaço vetorial real com dimensão finita e produto interno, e sejam $T, S : V \longrightarrow V$ operadores lineares. Mostre que T e S são auto-adjuntos e comutam se, e somente se, existe uma base B ortornormal formada por autovetores de T e S (simultaneamente).

7) Sejam V um $K-$espaço vetorial com produto interno e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Dados $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ arbitrários, mostre que existe um único vetor $w \in V$ tal que $\langle w, v_i\rangle = \alpha_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.