UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - CCE - UFES
3ª LISTA DE EXERCÍCIOS - ÁLGEBRA LINEAR II

1) Sejam V um $K-$espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$.

a) Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear auto-adjunto e $\langle T(v), v\rangle = 0$, $\forall v \in V$, então $T = 0$;
b) Se $T, S : V \longrightarrow V$ são operadores linear auto-adjuntos e $\langle S(v), v\rangle = \langle T(v), v\rangle$, $\forall v \in V$ então $S = T$;
c) Mostre que um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é normal se, e somente se, $||T(v)|| = ||T^*(v)||$, para todo $v \in V$.

2) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$. Mostre que se T é normal e possui exatamente n autovalores então T é auto-adjunto.

3) Seja $P : V \longrightarrow V$ uma projeção, com $\dim_K V < \infty$. Mostre que P é normal se, e somente se, P é auto-adjunto.

4) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um $K-$espaço vetorial. Mostre que se T é normal então $Ker\ T = Ker\ T^*$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

5) Sejam $T, S : V \longrightarrow V$ operadores normais, onde V é um $K-$espaço vetorial, e suponha que $T \circ S = 0$. Mostre que:

a) $\operatorname{Im} S \subset Ker\ T$;
b) $\operatorname{Im} S^* \subset Ker\ T^*$;
c) $\operatorname{Im} T \subset Ker\ S$;
d) $S \circ T = 0$.

6) Sejam $T, S : V \longrightarrow V$ operadores normais, onde V é um $K-$espaço vetorial. Mostre que se $T \circ S = S \circ T$ então $T \circ S$ é normal.